۵۶

فصل ۲

حرکت یک بعدی ذره

مقدمه

حرکت در گستره وسیعی از پدیده‌ها از حرکت توپ در زمین بازی تا حرکت ماهواره در فضا و حرکت مولکول‌های هوا در ریه و حرکت آب در لوله‌ها و حرکت زمین و سیارات و غیره مشاهده می‌شود. علم مطالعه حرکت اجسام، مکانیک نامیده می‌شود و به بخشی از آن که به بررسی حرکت اجسام بدون در نظر گرفتن علت آن می‌پردازد، سینماتیک یا حرکت شناسی می‌گویند. به عبارت دیگر در بخش سینماتیک از رابطه بین جابه‌جایی، سرعت، شتاب و زمان صحبت می‌شود ولی عامل حرکت یا سکون اجسام (نیرو) در نظر گرفته نمی‌شود.

حرکت هر جسم ممکن است انتقالی، دورانی یا ارتعاشی و یا مثلاً در مورد سقوط قطره آب و یا حرکت توپ تنیس، ترکیبی از اینها باشد. اگر در حرکت هر جسم آن را بدون بعد به عنوان نقطه مادی یا ذره فرض کنیم می‌توانیم تنها حرکت انتقالی آن را در نظر بگیریم، در این صورت ضمن ساده شدن بررسی‌ها و محاسبات، رفتار جسم واقعی نیز تا حدودی قابل توصیف است. گاهی می‌توانیم با توجه به فاصله زیاد زمین و خورشید آنها را ذره فرض کنیم. حرکت انتقالی به معنی حرکت روی خط مستقیم نیست بلکه به این معنی است که تمام اجزاء یک جسم (به عنوان ذره) در یک انتقال، به یک اندازه جابه‌جا می‌شوند.

هر چند جابه‌جایی، سرعت و شتاب هر ذره کمیت‌های برداری هستند چون در این فصل فقط با حرکت یک بعدی سرو کار داریم نیازی به استفاده کامل از روش‌های برداری نیست در عین حال به دلیل اهمیت بردارها به عنوان ابزاری که به اختصار و

کمیات
نرده‌ای ← فقط اندازه دارد

ساده سازی مفاهیم و روابط پیچیده فیزیکی کمک می‌کند ، ابتدا ضمن تعریف کمیت‌های برداری و اسکالر و با در نظر گرفتن بردار جابه‌جایی، به جمع و تفریق بردارها می‌پردازیم سپس با معرفی کمیت‌هایی مثل جابه‌جایی ، تندی متوسط و سرعت متوسط سرعت لحظه‌ای ، شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای به حرکت یک بعدی ذره می‌پردازیم.

۱-۲ کمیت‌های نرده‌ای (اسکالر)و کمیت‌های برداری

یک تقسیم‌بندی دیگر برای کمیت‌های فیزیکی، تقسیم آنها به کمیت‌های برداری و نرده‌ای (اسکالر) است. به کمیت‌هایی که برای بیان آنها تنها گفتن یک مقدار، اندازه یا بزرگی کافی باشد کمیت‌های نرده‌ای یا اسکالر می‌گویند. مثل طول، جرم، زمان، دما ، کار، انرژی، جرم حجمی، تندی و ... به کمیت‌هایی که برای بیان آنها علاوه بر گفتن یک مقدار، اندازه یا بزرگی بایستی جهتی نیز مشخص شود، کمیت‌های برداری می‌گویند، مثل ؛نیرو، سرعت، شتاب، جابه‌جایی، گشتاور، تکانهٔ خطی، تکانهٔ زاویه‌ای و....

پرسش۱. وقتی می‌گوییم دما $5^\circ C$ زیر صفر یا $5^\circ C$ بالای صفر است و یا هنگامی که می‌گوییم ده سال بعد از هجرت یا ده سال قبل ازهجرت به نظر می‌رسد که برای کمیت‌های دما و زمان علاوه بر مقدار جهتی را هم مشخص کرده‌ایم، در حالی که این دو کمیت را به عنوان کمیت‌های اسکالر می‌شناسیم، در این مورد توضیح دهید.

سرعت، کمیتی برداری است که یک اندازه و یک جهت دارد، مقدار یا اندازهٔ بردار سرعت را تندی می‌نامیم، البته در برخی موارد که جهت بردار سرعت معلوم باشد، ممکن است برای بیان اندازه سرعت، به جای کلمه تندی از کلمه سرعت نیز استفاده کنیم. جابه‌جایی نیز کمیتی برداری است که اندازه آن طول یا مسافت است. هر بردار با خطی جهت‌دار نمایش داده می‌شود که طول آن مشخص کننده اندازه آن و فلش، جهت بردار را نشان می‌دهد. در این متن برای نمایش بردار از حروف کوچک یا حروف بزرگ با نماد فلش روی آن استفاده می‌کنیم و اگر منظور فقط اندازهٔ بردار باشد از

اندازه بردار $\vec{A}$ = $|A|$

* منظور از جهت بردار $\vec{A}$، تعیین زاویه‌ای است که این بردار با محور x ها می‌سازد

$|A|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$

روش هندسی

$\tan\theta=\frac{A_y}{A_x}$

مولفه‌ای

نمایش بردار

$\tan\theta=\frac{A_x}{A_y}$

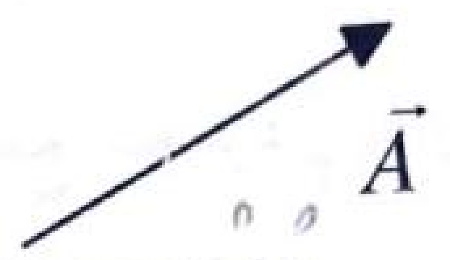
حروف کوچک یا بزرگ بدون فلش استفاده می‌کنیم، مثلاً می‌نویسیم بردار $\vec{a}$ با اندازه ۵ = a یا بردار $\vec{A}$ با اندازهٔ ۵ = A.

در برخی کتاب‌ها بردار $\vec{a}$ را به صورت **A** و اندازهٔ آن را به صورت $|A|$ نشان می‌دهند که ازحروف بزرگ و سیاه استفاده شده است (**شکل ۲-۱**).

$\vec{R}_1=\vec{A}-2\vec{B}+\vec{C}$

$\vec{R}_2=2\vec{A}-\vec{C}$

$R_3=-2\vec{B}+\vec{A}$



شکل۲-۱ نمایش یک بردار

مثلثی

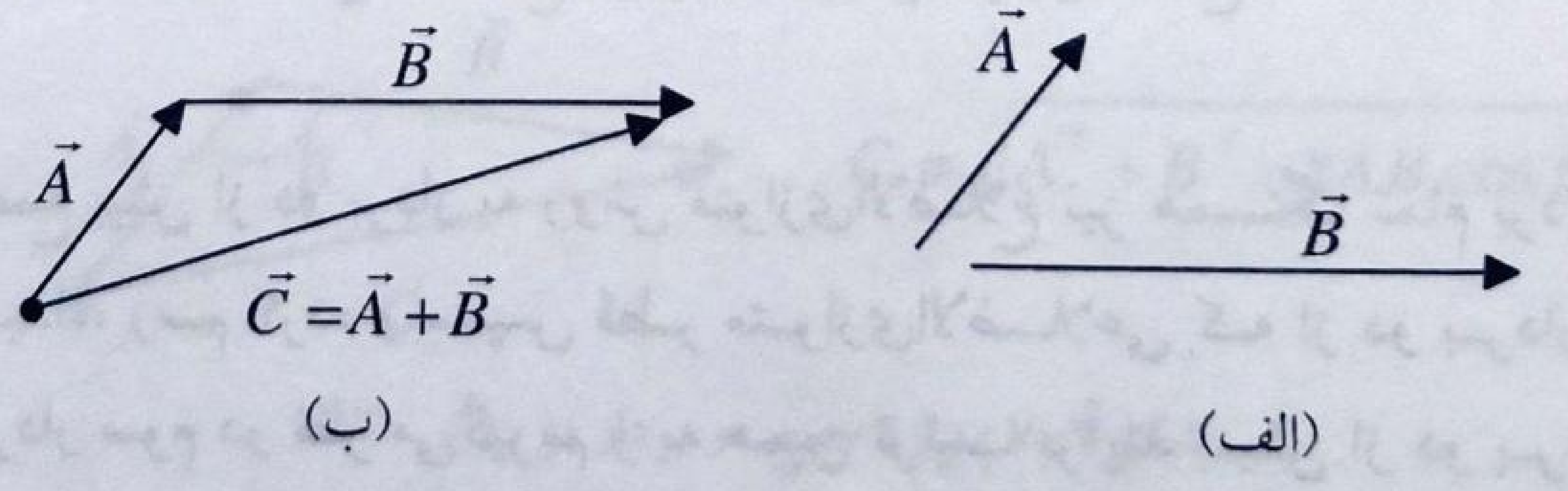
روش هندسی

متوازی‌الاضلاع

۲-۲ جمع بردارها

روش مولفه‌ای

در حالت معمولی برای جمع بردارها از دو روش مثلث و متوازی‌الاضلاع استفاده می‌شود. اگر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را مطابق **شکل ۲-۲الف** در نظر بگیریم، در روش مثلث از یک نقطه مبداء ابتدا همسنگ یک بردار مثلاً بردار $\vec{A}$ و از انتهای آن همسنگ بردار دیگر، بردار $\vec{B}$، را رسم می‌کنیم، جمع دو بردار برداری است که ابتدای آن مبداء و انتهای آن، انتهای آخرین بردار، در اینجا بردار $\vec{B}$، است (**شکل ۲-۲ب.**)

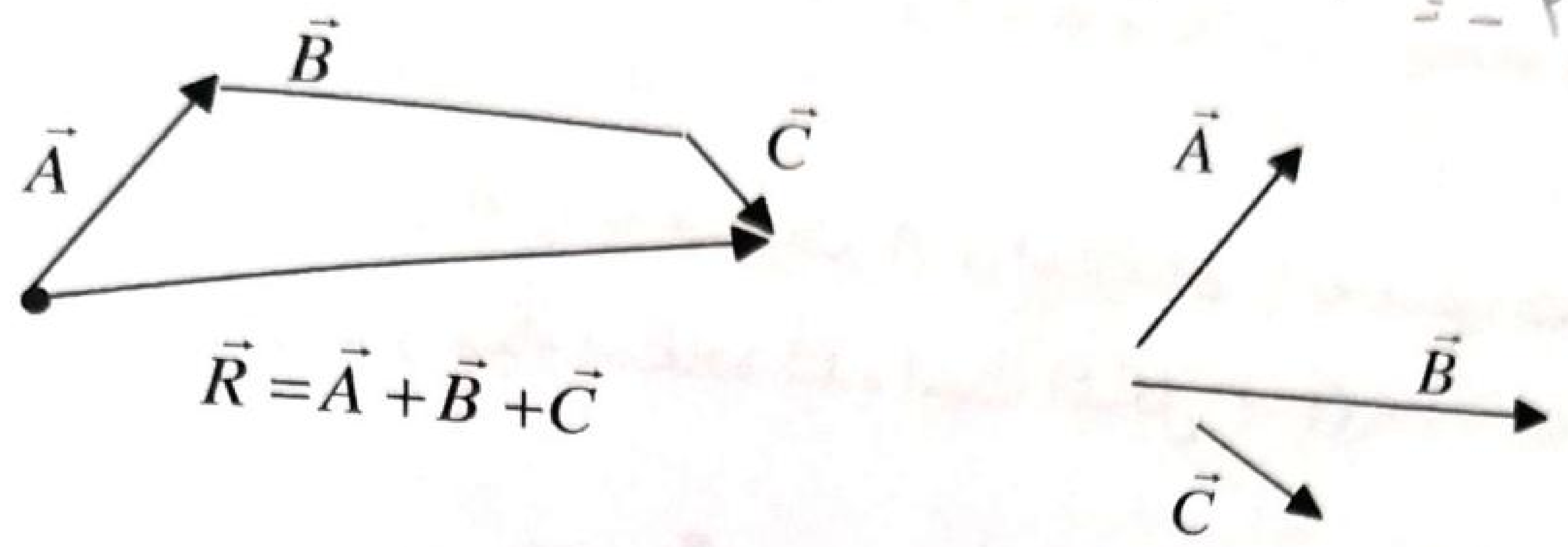


شکل۲-۲ جمع دو بردار به روش مثلث

در صورتی که بخواهیم بیش از دو بردار را با این روش با یکدیگر جمع کنیم به همین ترتیب عمل می‌کنیم، یعنی ابتدا همسنگ یک بردار و از انتهای آن همسنگ بردار دوم و از انتهای بردار دوم همسنگ بردار سوم را رسم کرده و سپس از مبداء و به انتهای آخرین بردار، برداری را رسم می‌کنیم که برآیند یا جمع سه بردار است (**شکل ۲-۳.**)

$\leftarrow \vec{R}_2 = 2\vec{A} - \vec{C}$

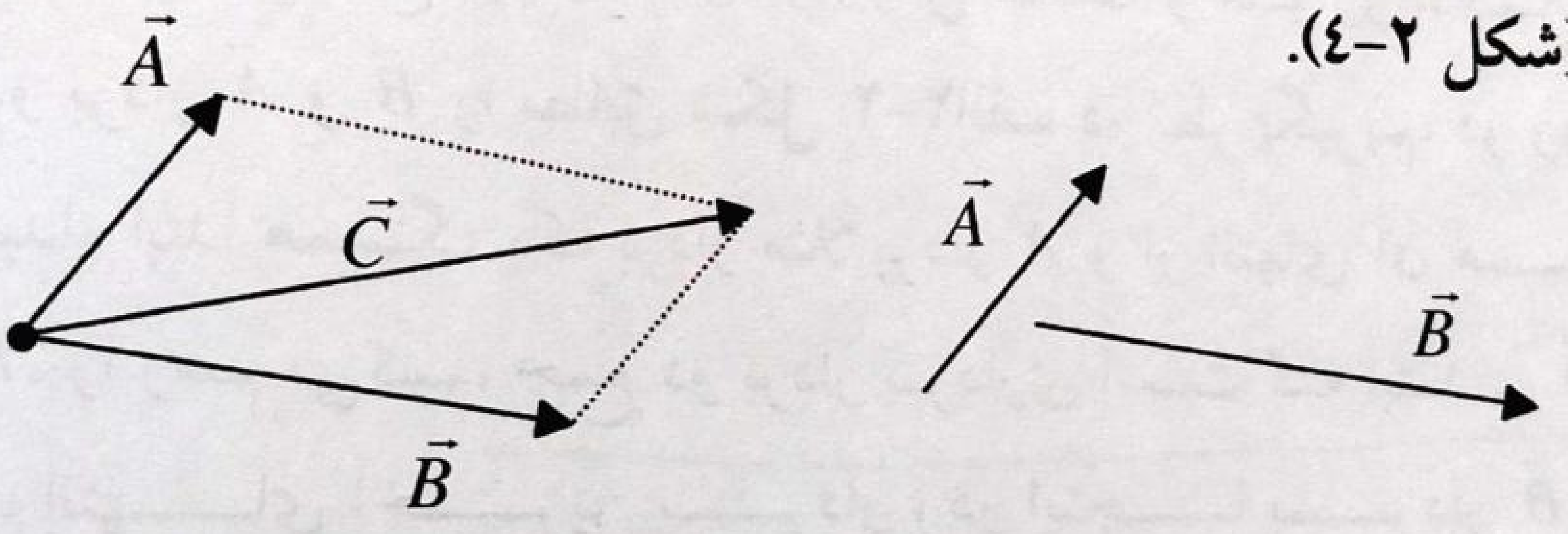
$\leftarrow \vec{R}_3 = -2\vec{B} + \vec{A}$



$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

شکل۲-۳ جمع سه بردار به روش مثلث

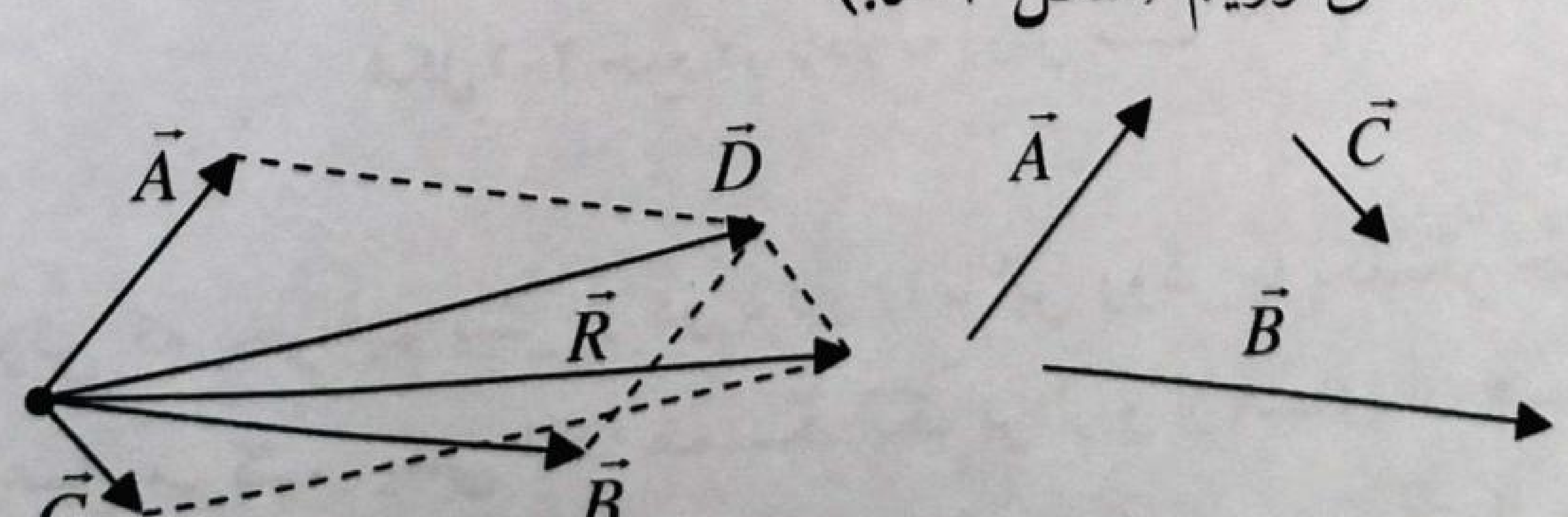
در روش متوازی‌الاضلاع برای به دست آوردن جمع دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ از یک نقطه مبداء همسنگ دو بردار را رسم کرده و متوازی‌الاضلاعی می‌سازیم که این دو بردار دو ضلع مجاور آن باشند، قطر این متوازی‌الاضلاع که از مبداء می‌گذرد برآیند دو بردار است (**شکل ۲-۴**).



$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

شکل۲-۴ جمع دو بردار به روش متوازی‌الاضلاع

در جمع بیش از دو بردار به روش متوازی‌الاضلاع نیز همسنگ تمام بردارها را از یک نقطه، مبداء، رسم کرده و سپس قطر متوازی‌الاضلاعی که از دو بردار ساخته می‌شود با بردار سوم در نظر می‌گیریم و به همین ترتیب برآیند بیش از دو بردار را با این روش به دست می‌آوریم (**شکل ۲-۵**).



$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow \vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$
$$\vec{R} = \vec{D} + \vec{C}$$

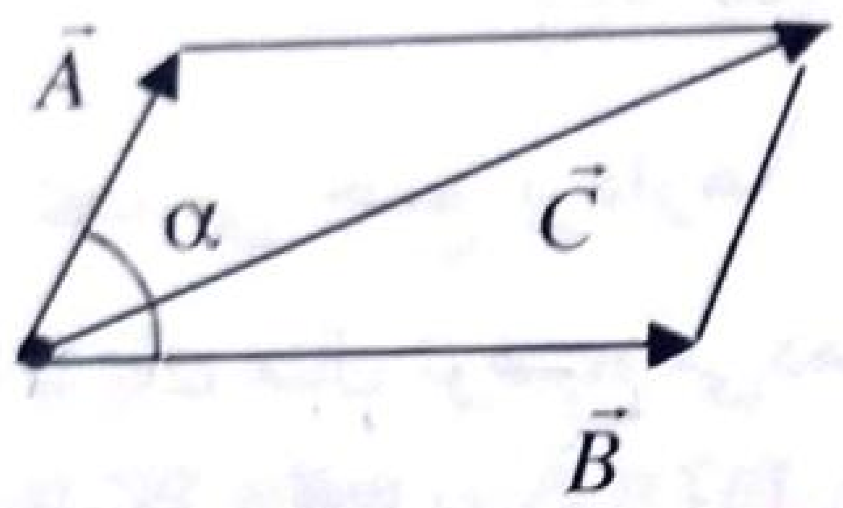
شکل۲-۵ جمع بیش از دو بردار به روش متوازی‌الاضلاع

$\vec{R}_1 = A - 2\vec{B} + \vec{C}$

$R_2 = 2\vec{A} - \vec{C}$

$R_4 = -2\vec{B} + A$

در جمع دو بردار به روش متوازی‌الاضلاع اگر زاویه بین دو بردار را که از یک نقطه رسم شده‌اند، α فرض کنیم اندازهٔ حاصل‌جمع دو بردار از رابطه $C=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\alpha}$ به دست می‌آید (**شکل ۲–۶**).

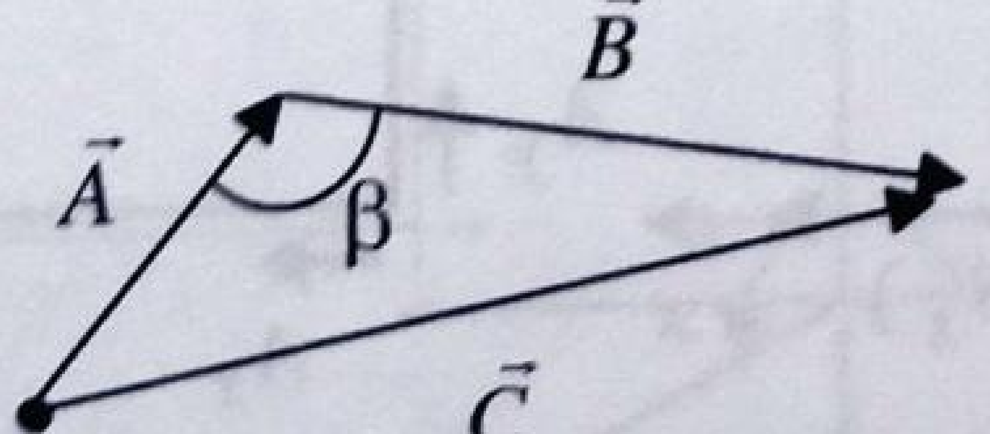


$$C=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\alpha}$$

شکل ۲–۶ اندازهٔ جمع دو بردار به روش متوازی‌الاضلاع

پرسش ۲. ثابت کنید اندازهٔ حاصل‌جمع دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ (**شکل ۶–۲**) از رابطه $C=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\alpha}$ به دست می‌آید.

در جمع دو بردار به روش مثلث اگر زاویه بین دو بردار که پشت سر هم رسم شده‌اند، β فرض شود، اندازهٔ حاصل‌جمع دو بردار از رابطه $C=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\beta}$ به دست می‌آید (**شکل ۲–۷**).



$$C=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\beta}$$

شکل ۲–۷ اندازهٔ جمع دو بردار به روش مثلث

پرسش ۳. ثابت کنید اندازهٔ حاصل‌جمع دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ شکل ۷–۲، روش مثلث، از رابطهٔ $C=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\beta}$ به دست می‌آید.

برای مشخص شدن یک بردار علاوه بر اندازه، جهت آن را نیز باید مشخص کرد. معمولاً جهت یک بردار را نسبت به جهت مثبت محور xها در جهت پادساعتگرد می‌سنجند. در دو روش فوق هر چند از روابط داده شده می‌توان اندازهٔ حاصل‌جمع

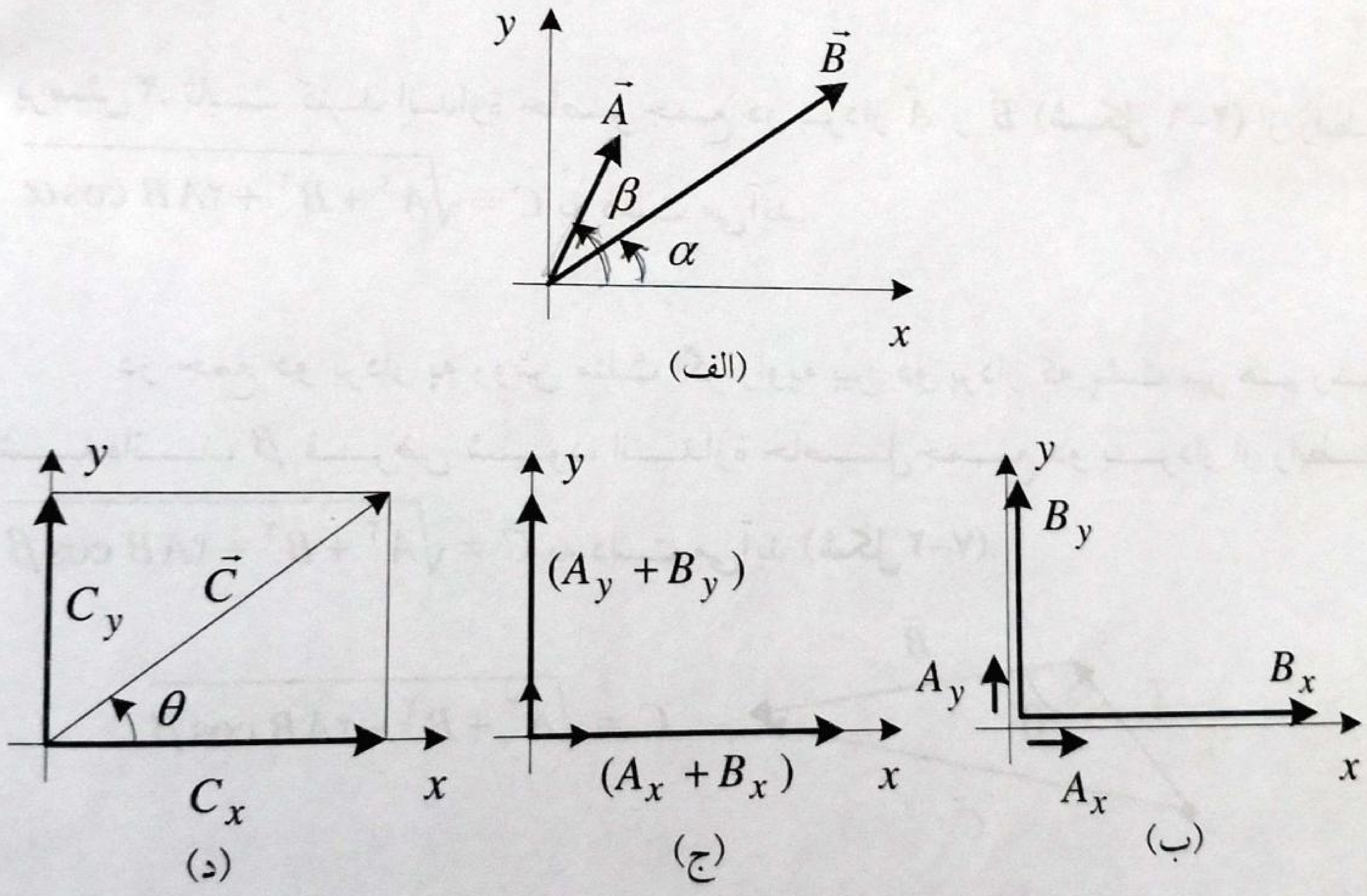
$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

برای تعیین جهت بردار حاصل‌جمع، بایستی زاویه این بردارها را به دست آورد ولی برای تعیین جهت بردار حاصل‌جمع، بایستی زاویه این بردار را نسبت به جهت مثبت محور xها تعیین کنیم که از روش‌های ریاضی مثل روش حل مثلث ممکن است در نهایت بتوانیم آن را تعیین کنیم که روشی طولانی است بنابراین از روش ساده‌تر زیر استفاده می‌کنیم.

۲-۳ روش تحلیلی جمع بردارها

این روش را با یک مثال توضیح می‌دهیم، فرض کنیم بخواهیم مطابق شکل ۲-۸ الف برآیند دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را به دست آوریم.



شکل ۲-۸ جمع دو بردار به روش تحلیلی

برای این منظور ابتدا مؤلفه‌های هر بردار را روی محورها تعیین و مشخص می‌کنیم (**شکل ۲-۸ ب**) اکنون به جای دو بردار مورب $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌توانیم چهار بردار را که در دو راستای عمود برهم x و y واقعند با یکدیگر جمع کنیم و با توجه به **شکل ۲-۸ ج** کافی است جمع دو بردار عمود برهم با اندازه‌های $C_x = A_x + B_x$ و $C_y = A_y + B_y$ را به دست آوریم که C_x، C_y مؤلفه‌های بردار برآیند هستند. در این

اگر فقط $|R'|$ مدنظر باشد $|R'| = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 + 2|A||B|\cos}$

صورت اندازه و جهت بردار برآیند با توجه به **شکل ۲-۸**، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$C = \sqrt{C_x{}^2 + C_y{}^2} \quad \text{یا} \quad \boxed{C = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}}$$

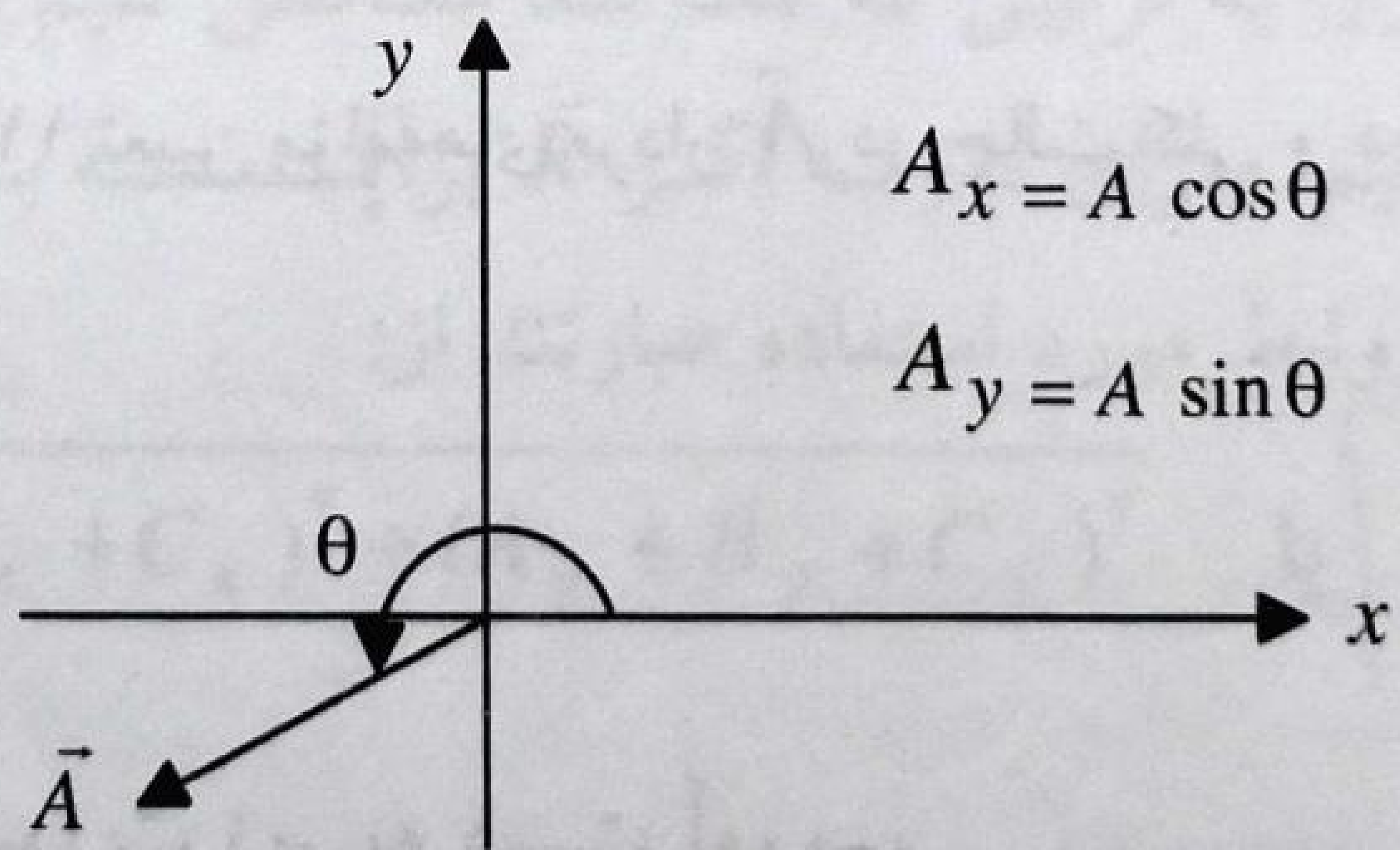
$$tg\,\theta = \frac{C_y}{C_x} \quad \text{یا} \quad tg\,\theta = \frac{(A_y + B_y)}{(A_x + B_x)}$$

θ زاویه بین بردار $\vec{C}$ با جهت مثبت xها است.

پرسش ٤. در مثال فوق اگر $\alpha = 37^\circ$ و $\beta = \cancel{37^\circ}$ ۵۳ و $A = 2m$ و $B = 6m$ باشند، اندازه و جهت بردار $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ را تعیین کنید.

در این روش چند نکته قابل ملاحظه است.

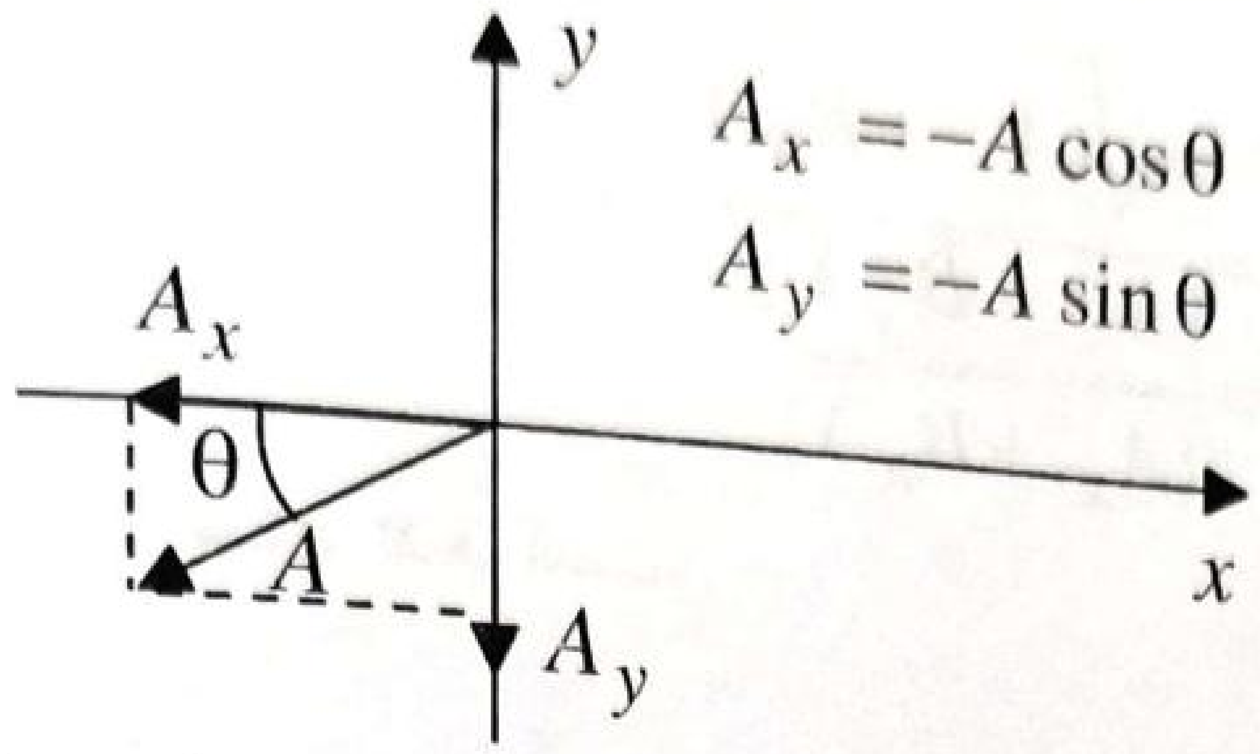
الف) هر بردار مثل $\vec{A}$ در هر ربع مثلثاتی که باشد می‌توان مؤلفه‌های آن را با توجه به زاویه‌ای که نسبت به جهت مثبت محور xها درجهت پادساعتگرد دارد، مطابق **شکل ۲-۹** از روابط زیر به دست آورد؛



شکل ۲-۹ تعیین مؤلفه‌های بردار در حالت کلی

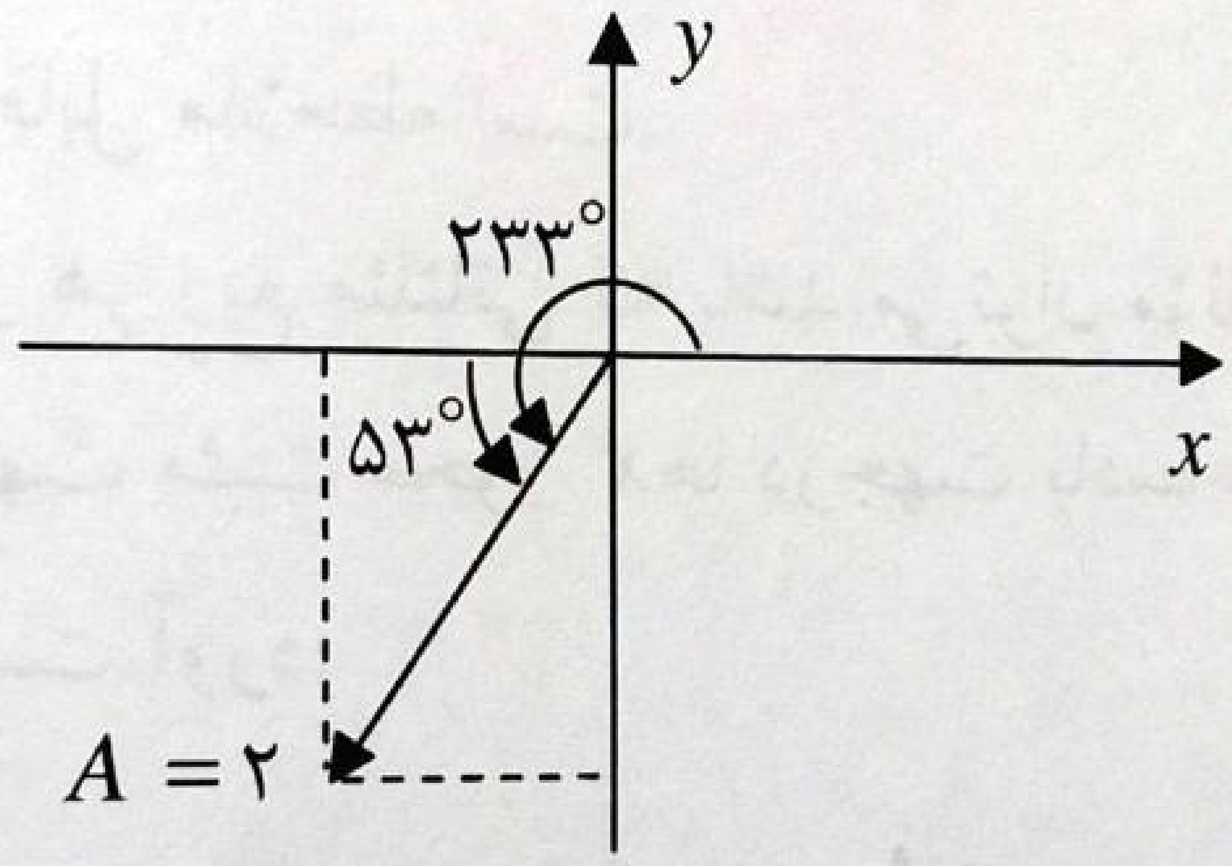
ولی در صورتی که در هر ربع مثلثاتی زاویهٔ بردار را با یک محور در نظر بگیریم، **شکل ۲-۱۰**، می‌توانیم برای سادگی مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازیم که وترش، بردار موردنظر باشد آنگاه ضلع مقابل به زاویهٔ موردنظر، A_x یا A_y، برابر است با وتر در سینوس زاویه و ضلع مجاور به زاویهٔ موردنظر، A_x یا A_y، برابر است با وتر در کسینوس زاویه و در صورتی که جهت هر مؤلفه در جهت مثبت محور قرار داشته باشد

مثبت و در صورتی که در جهت منفی محور قرار داشته باشد منفی در نظر گرفته می‌شود، یعنی:



شکل ۲-۱۰ تعیین مؤلفه‌های بردار در حالت ساده

به عنوان مثال در **شکل۲-۱۱** مؤلفه‌های بردار $\vec{A}$ را می‌توانیم در حالت کلی به صورت زیر تعیین کنیم.



شکل ۲-۱۱ تعیین مؤلفه‌های بردار $\vec{A}$ در حالت کلی و در حالت ساده

$$A_x = A\cos ۲۳۳ = -۱/۲$$
$$A_y = A\sin ۲۳۳ = -۱/۶$$

یا در حالت ساده به صورت زیر به دست آوریم،

$$A_x = -A\cos ۵۳ = -۱/۲$$
$$A_y = -A\sin ۵۳ = -۱/۶$$

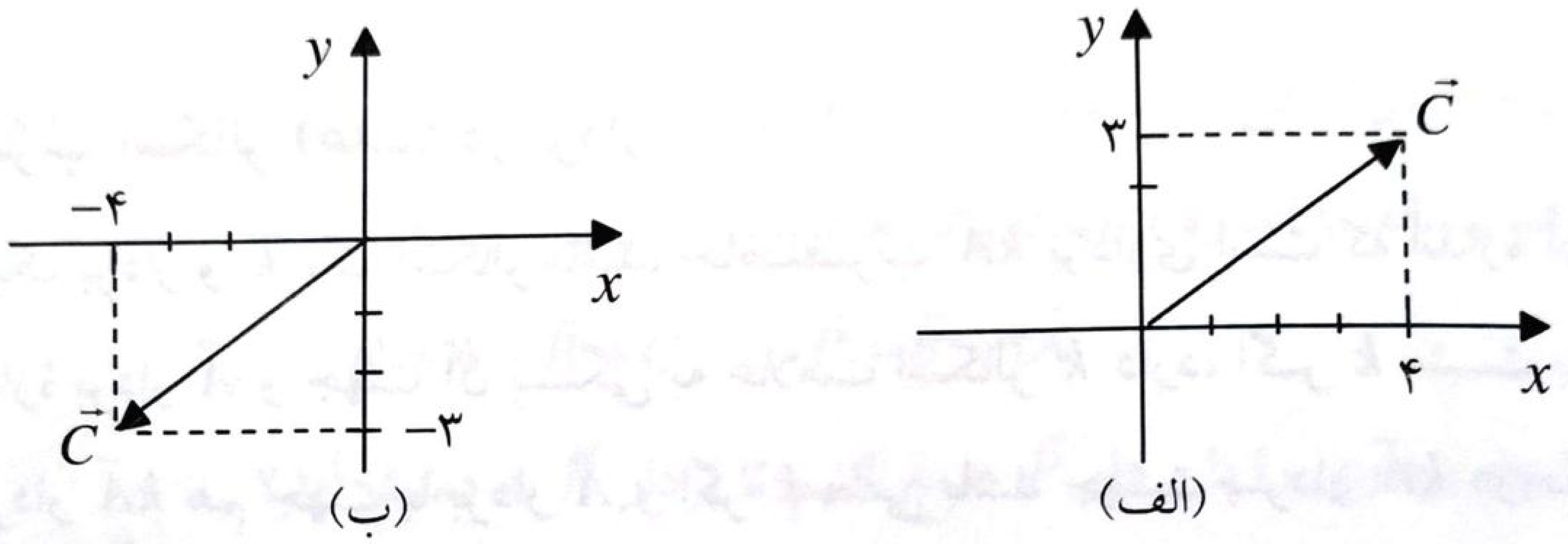
ب).فرض کنیم اندازهٔ و جهت برداری به صورت زیر به دست آمده باشد؛

$$C = \sqrt{(C_x)^۲ + (C_y)^۲} \Rightarrow C = \sqrt{(-۴)^۲ + (-۳)^۲}$$

$$tg\,\theta = \frac{C_y}{C_x} \Rightarrow tg\,\theta = \frac{-۳}{-۴}$$

اگر از ما بخواهند این بردار را رسم کنیم بایستی ابتدا جهت آن یا امتداد بردار را نسبت

به جهت مثبت محور xها مشخص کنیم که اگر علامت‌های مربـوط بـه کـسر $tg\,\theta$ را ساده کنیم بردار C را به صورت (**شکل ۲-۱۲الف**)، رسم خواهیم کرد که اشتباه است، بنابراین هیچگاه لازم نیست علامت‌ها را در کسر مربوطه ساده کنیـم تـا بتـوانیم جهـت صحیح بردار را مشخص کنیم (**شکل ۲-۱۲ب.**)



شکل ۲-۱۲ الف) نمایش نادرست بردار $\vec{C}$ ب) نمایش درست بردار $\vec{C}$

در صورتی که حاصل‌جمع سه یا چند بردار را به صورت تحلیلی از نظر اندازه و جهت بخواهیم، لازم نیست تمام موارد فوق را انجام دهـیم، کـافی اسـت بـا توجـه بـه شکل، مؤلفه‌های هر بردار را به ترتیبی که گفته شد مشخص کنیم سپس از روابطـی کـه مـی‌نویـسیم اسـتفاده کنـیم. بـرای نمونـه اگـر $\vec{R}$ برآینـد سـه بـردار $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ باشـد یعنی $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ ، روابط مورد استفاده عبارتند از:

$$R = \sqrt{(A_x + B_x + C_x)^۲ + (A_y + B_y + C_y)^۲} \quad \text{یا} \quad \boxed{R = \sqrt{R_x{}^۲ + R_y{}^۲}}$$

و

$$tg\,\theta = \frac{A_y + B_y + C_y}{A_x + B_x + C_x} \quad \text{یا} \quad \boxed{tg\,\theta = \frac{R_y}{R_x}}$$

اگر $\vec{R}$برآیند تعداد زیادی بردار باشد؛

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \cdots$$

روابط مورد استفاده عبارتند از:

$$R = \sqrt{(A_x + B_x + C_x + D_x + ...)^۲ + (A_y + B_y + C_y + D_y + ...)^۲}$$

یا

$a\vec{B}$: { $|a\vec{B}| = |a| \cdot |\vec{B}| \Rightarrow a=-3 , \vec{B}=2\hat{i} \rightarrow a\vec{B} = -6\hat{i}$
$a>0$ $a\vec{B}$ هم‌جهت با بردار $\vec{B}$
$a<0$ $\vec{B}$ خلاف بردار $\vec{B}$

$$\boxed{R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}}$$

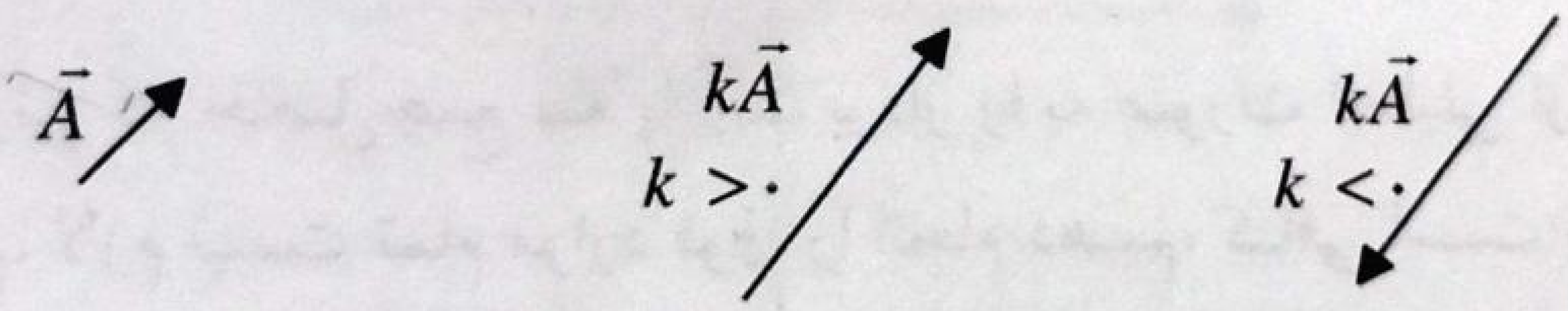
و

$$tg\,\theta = \frac{A_y + B_y + C_y + D_y + ...}{A_x + B_x + C_x + D_x + ...} \quad \text{یا} \quad \boxed{tg\,\theta = \frac{R_y}{R_x}}$$

$= -2\vec{B} + \vec{A}$

۲-٤ ضرب اسکالر (عدد) در بردار

اگر $\vec{A}$ یک بردار و k یک اسکالر باشد، حاصلضرب $k\vec{A}$ برداری است که اندازهٔ آن k برابر اندازهٔ بردار $\vec{A}$ و جهت آن بستگی به علامت اسکالر k دارد، اگر k مثبت باشد جهت بردار $k\vec{A}$ هم جهت با بردار $\vec{A}$ و اگر k منفی باشد جهت بردار $k\vec{A}$ درخلاف جهت بردار $\vec{A}$ خواهد بود (**شکل ۲-۱۳**).



شکل ۲-۱۳ ضرب(عدد) در بردار

با توجه به این که اگر اندازهٔ برداری k برابرشود، اندازهٔ مؤلفه‌های آن نیز k برابر می‌شود، برای تعیین اندازه و جهت بردار $\vec{C} = 2\vec{A} + \vec{B}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$R = \sqrt{(2A_x + B_x)^2 + (2A_y + B_y)^2} \quad \text{و} \quad tg\,\theta = \frac{2A_y + B_y}{2A_x + B_x}$$

۲-۵ تفریق برداری

اگر بردار $\vec{C}$ تفاضل دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ باشد یعنی $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$، این رابطه را می‌توانیم به صورت $\vec{C} = \vec{A} + (-\vec{B})$ بنویسیم یعنی بردار $\vec{A}$ را با منفی بردار $\vec{B}$ جمع کنیم. اما منفی یک بردار یعنی حاصل‌ضرب اسکالر ۱- درآن بردار، بنابراین بردار $(-\vec{B})$ برداری است برابر و هم اندازه با بردار $\vec{B}$ ولی در خلاف جهت آن و چون با تغییر جهت بردارجهت

مؤلفه‌هایش نیز تغییر می‌کند، می‌توانیم برای تعیین اندازه و جهت بردار $\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}$ روابط زیر را بنویسیم:

$$R=\sqrt{(A_x-B_x)^{۲}+(A_y-B_y)^{۲}} \quad \text{و} \quad tg\,\theta=\frac{A_y-B_y}{A_x-B_x}$$

① مثال ص ٤٦

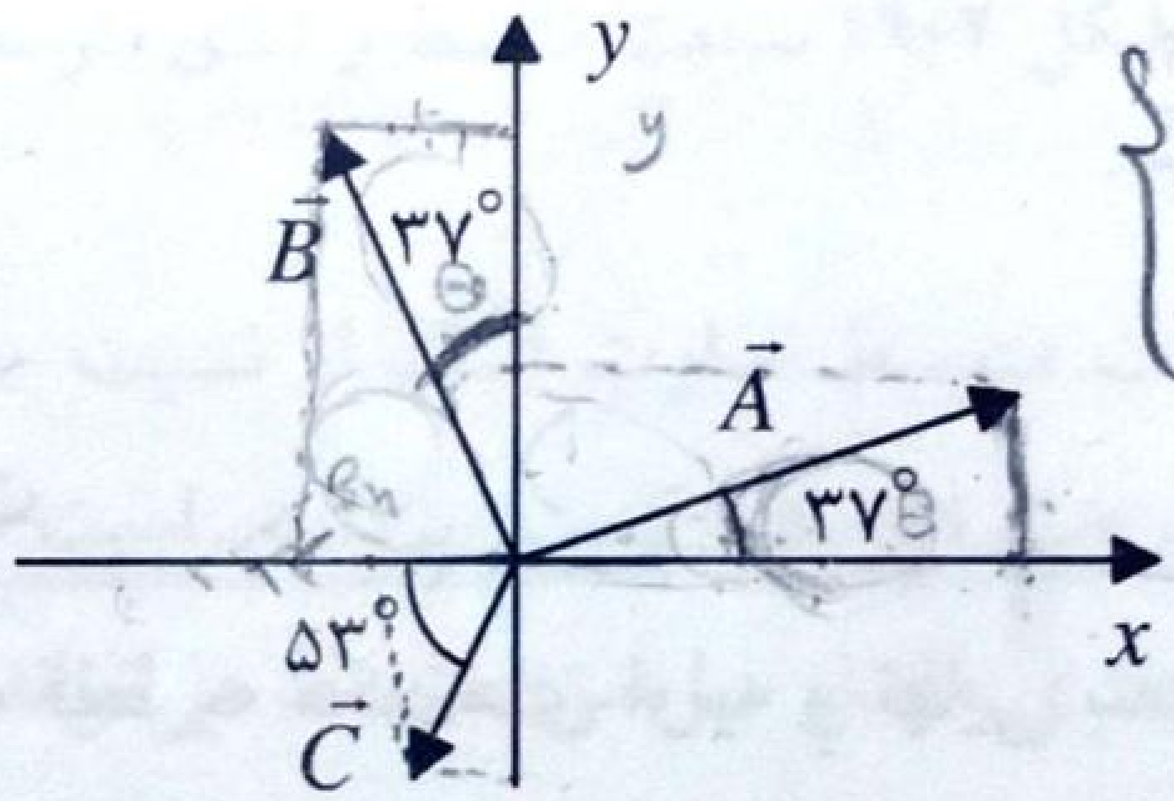
② **مثال۲-۱** در شکل ۲-۱٤،اندازه بردارهای $\vec{C},\vec{B},\vec{A}$ به ترتیب ۳،۲ و ۱ واحد فرض می‌شوند، الف) اندازه وجهت بردارهای زیر را تعیین کنید:

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} \quad , \quad \vec{P}=\vec{B}-۲\vec{A}$$

ب) چه برداری را با بردار $\vec{P}$ جمع کنیم تا بردار $\vec{R}$ به دست آید؟

$$\begin{cases} B_x=-B\sin 37 \\ B_y=B\cos 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_x=-C\cos 53^\circ \\ C_y=-C\sin 53^\circ \end{cases}$$



$$\begin{cases} A_y=A\sin 37 \\ A_x=A\cos 37 \end{cases}$$

شکل ۲-۱٤ مثال ۲-۱

حل:

$$\begin{cases} A_x=A\cos ۳۷=۲(۰/۸)=۱/۶ \\ A_y=A\sin ۳۷=۲(۰/۶)=۱/۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x=-B\sin ۳۷=-۳(۰/۶)=-۱/۸ \\ B_y=B\cos ۳۷=۳(۰/۸)=۲/۴ \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_x=-C\cos ۵۳=-۱(۰/۶)=-۰/۶ \\ C_y=-C\sin ۵۳=-۱(۰/۸)=-۰/۸ \end{cases}$$

الف. ①

$$\begin{cases} R_x=A_x+B_x+C_x \rightarrow R_x=۱/۶-۱/۸-۰/۶=-۰/۸ \\ R_y=A_y+B_y+C_y \rightarrow R_y=۱/۲+۲/۴-۰/۸=۲/۸ \end{cases}$$

$$R=\sqrt{R_x{}^{۲}+R_y{}^{۲}}=\sqrt{(-۰/۸)^{۲}+(۲/۸)^{۲}}=\sqrt{۸/۴۸}=۲/۹۱$$

و

$$tg\,\theta=\frac{R_y}{R_x} \Rightarrow tg\,\theta=\frac{۲/۸}{-۰/۸}=\frac{۷}{-۲}$$

ب.

$$P_x = B_x - ۲A_x \Rightarrow P_x = -۱/۸ - ۲(۱/۶) = -۵$$
$$P_y = B_y - ۲A_y \Rightarrow P_y = ۲/۴ - ۲(۱/۲) = ۰$$

$$P = \sqrt{{P_x}^۲ + {P_y}^۲} = \sqrt{(-۵)^۲} = ۵ \quad , \quad tg\,\theta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{۰}{-۵} \Rightarrow \theta = ۱۸۰^\circ$$

$$\vec{X} + \vec{P} = \vec{R} \Rightarrow \vec{X} = \vec{R} - \vec{P} \Rightarrow \vec{X} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} - \vec{B} + ۲\vec{A} \Rightarrow \vec{X} = ۳\vec{A} + \vec{C}$$

$$\left.\begin{array}{l} -X_x = ۳A_x + C_x \\ X_y = ۳A_y + C_y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} X_x = ۴/۸ - ۰/۶ = ۴/۲ \\ X_y = ۳/۶ - ۰/۸ = ۲/۸ \end{cases}$$

$$X = \sqrt{(X_x)^۲ + (X_y)^۲} = \sqrt{(۴/۲)^۲ + (۲/۸)^۲} = \sqrt{۲۵/۴۸} \Rightarrow X = ۵/۰۴$$

$$, tg\,\theta = \frac{X_y}{X_x} = \frac{۲/۸}{۴/۲} = \frac{۲}{۳}$$

۲-٦ جابه‌جایی و مسافت

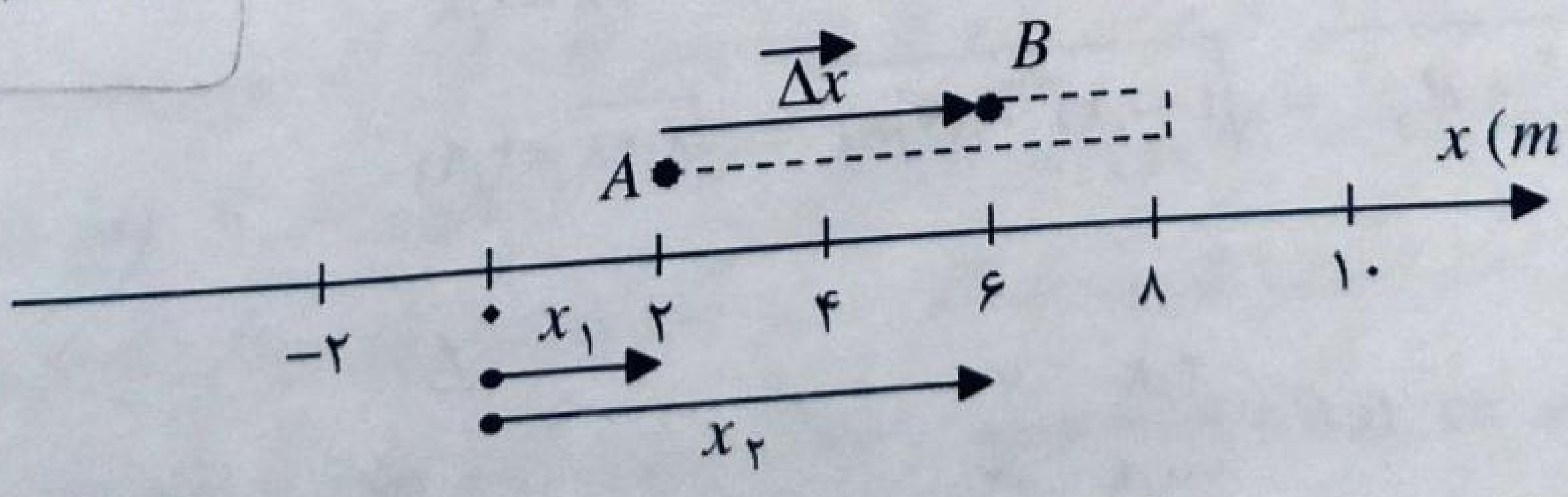
جابه‌جایی، برداری است که فقط به مکان‌های اولیه و نهایی بستگی دارد و به جزئیات حرکت و نوع مسیر وابسته نیست. مسافت طی شده بین دو نقطه، همیشه با اندازهٔ بردار جابه‌جایی بین همان دو نقطه برابر نیست. به عنوان مثال اگر متحرکی مطابق **شکل ۲-۱۵** ابتدا در جهت مثبت xها، ۶ متر و سپس درجهت منفی محور xها، ۲ متر از A تا B جابه‌جا شود، اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی شده توسط متحرک عبارت است از:

اندازه جابه‌جایی:

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ = ۶ - ۲ = ۴\ m$$

مسافت طی شده:

$$x = ۶ + ۲ = ۸\ m$$



شکل ۲-۱۵ اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت

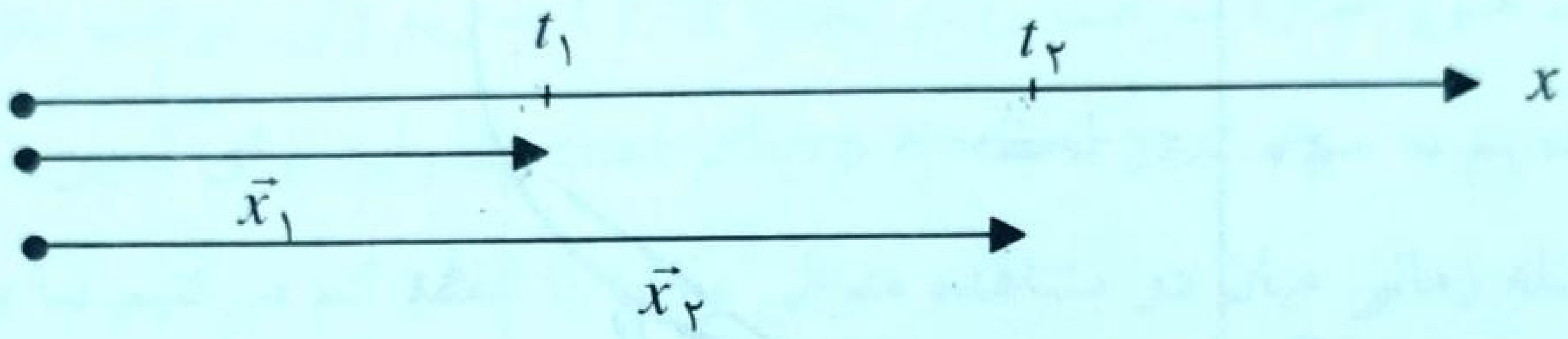
۲-۷ سرعت متوسط و تندی متوسط

متحرکی، در راستای محور xها در حرکت است. در لحظه t_1 در موقعیت x_1 و در لحظه t_2 در موقعیت x_2 می‌باشد، **شکل ۲-۱۶**، سرعت متوسط جسم متحرک در فاصله زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ عبارت است از:

سرعت متوسط

$$\overline{v} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \qquad (m/s)$$

که در آن $\Delta \vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ ، جابه‌جایی متحرک در فاصله زمانی Δt است.



شکل ۲-۱۶ سرعت متوسط و تندی متوسط

می‌توان گفت سرعت متوسط عبارت است از نسبت جابه‌جایی به زمانی که آن جابه‌جایی رخ می‌دهد. سرعت متوسط، کمیتی برداری است بنابراین هم اندازه دارد و هم جهت. درحالت یک بعدی مقدار سرعت متوسط می‌تواند مثبت یا منفی باشد و حرکت در جهت مثبت یا منفی را در راستای محور مختصات نشان می‌دهد. اندازهٔ سرعت را تندی می‌نامند. به عنوان مثال سرعت متحرکی در راستای محور x ممکن است $+10\ m/s$ یا $-10\ m/s$ باشد ولی در هر دو حالت تندی متحرک $10\ m/s$ است. یعنی تندی متوسط یک متحرک در فاصله زمانی Δt برابر است با مسافت پیموده شده بر فاصله زمانی Δt. اگر بردار سرعت ثابت باشد، تندی همان اندازهٔ بردار سرعت است ولی اگر بردار سرعت با زمان تغییر کند ممکن است تندی متوسط و سرعت متوسط متفاوت باشند.

$\bar{v} = x_2 - x_1 \rightarrow x_1 = x_2$ چون جابجایی ندارم

از نقطه شروع و به همان جا برگشته

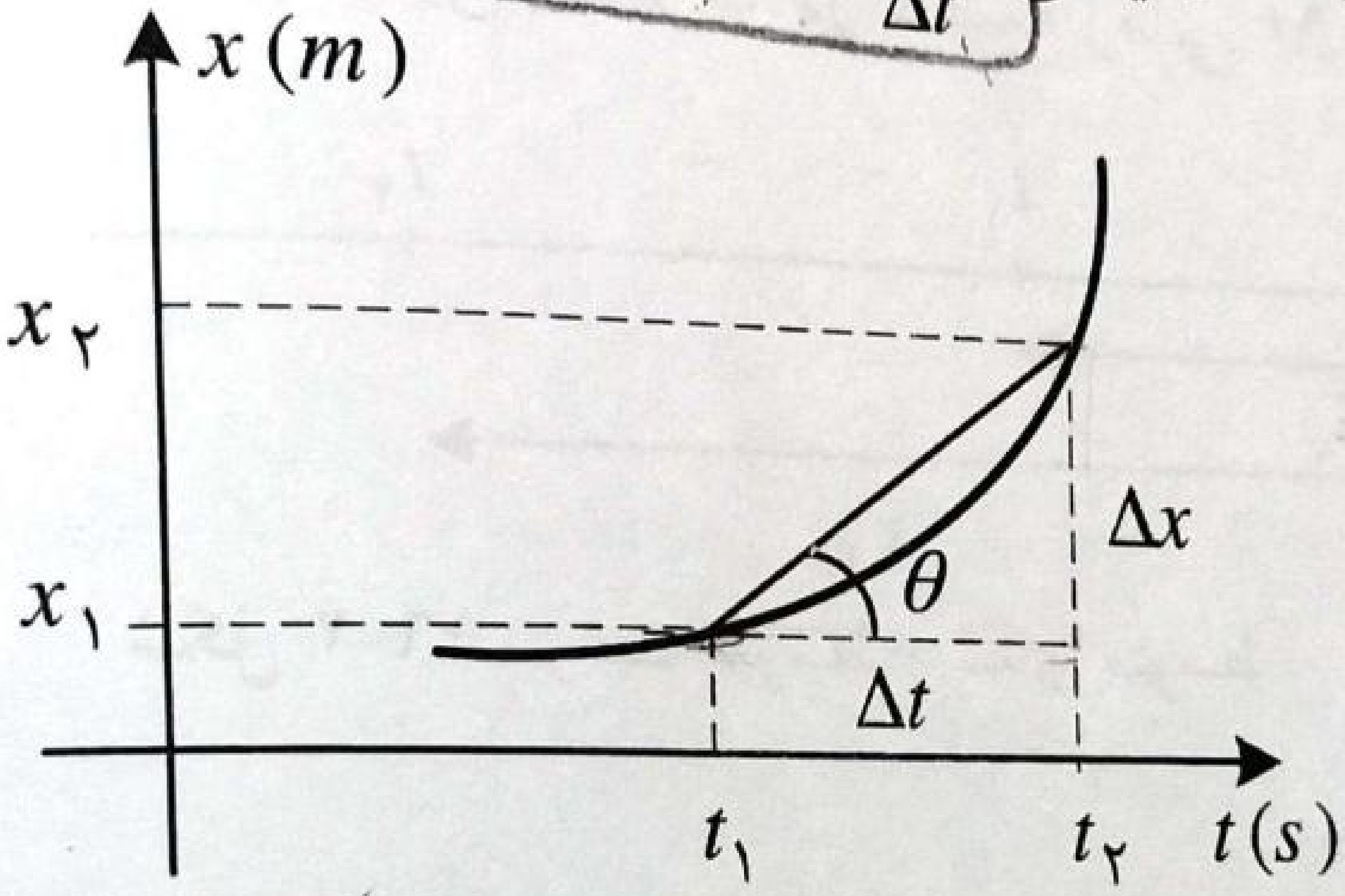
$\bar{v} = 0$

پرسش ۵. از ارتفاعی بالای سطح زمین، نقطه A، سنگی که در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود، حداکثر تا ارتفاع ۲۰متری بالا می‌رود و پس از ۱۰ ثانیه به محل اولیهٔ پرتاب بر می‌گردد. سرعت متوسط و تندی متوسط سنگ چقدر است؟

تندی متوسط $= \frac{40}{10} = 4\ m/s$

گاهی در حرکت یک بعدی هنگامی که جهت سرعت برای ما مشخص باشد ممکن است مثلا بگوییم سرعت متحرکی $50\,km/h$ است، که این مقدار مشخص کننده تندی متحرک یا اندازهٔ بردار سرعت است.

اگر متحرک مربوط به **شکل ۲-۱۶** را در نظر بگیریم، اندازهٔ سرعت متوسط بین دو نقطه را می‌توانیم از روی نمودار موقعیت- زمان به صورت شیب وتر بین دو نقطه تعریف کنیم (**شکل ۲-۱۷**) یعنی: $\boxed{\bar{v} = tg\,\theta = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$



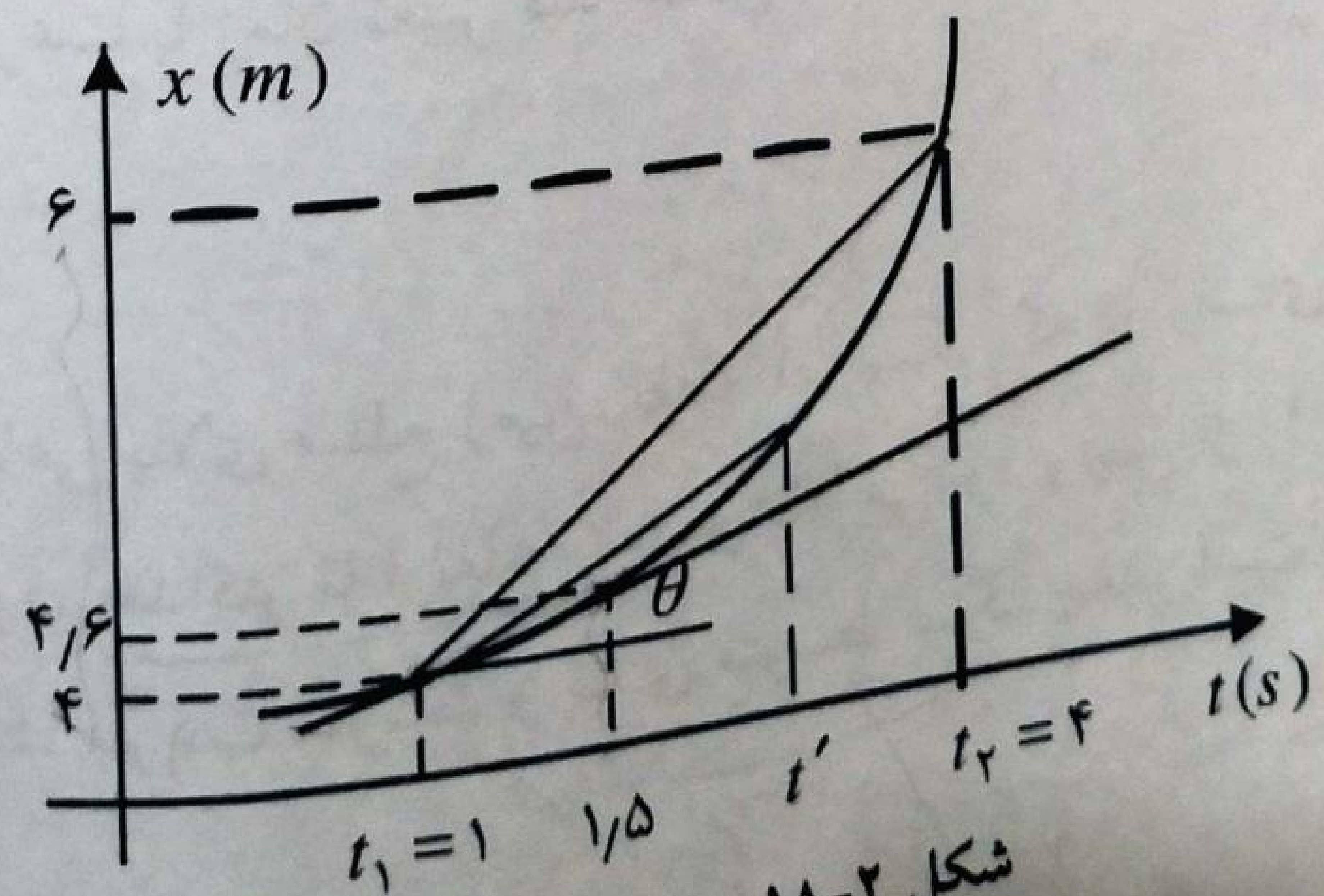
شکل ۲-۱۷ اندازهٔ سرعت متوسط از روی نمودار $(x - t)$

۲-۸ سرعت لحظه‌ای

در **شکل ۲-۱۸**، نموار موقعیت- زمان را برای حرکت متحرکی که در راستای محور xها در حرکت است رسم کرده‌ایم، اندازهٔ سرعت متوسط در فاصله زمانی t_1 تا t_2 یعنی در فاصله زمانی ۳ ثانیه برابر است با؛

سرعت متوسط

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۶-۴}{۴-۱} = ۰/۶۷\ m/s$$



شکل ۲-۱۸ سرعت لحظه‌ای

ولی اندازهٔ سرعت در هر لحظه‌ای مثل $t_1 = 1s$ ، $t_2 = 4s$ و t' مشخص نیست.
اگر بخواهیم اندازهٔ سرعت را مثلا در لحظهٔ $t = 1s$ به دست آوریم ابتدا اندازه سرعت متوسط را بین دو لحظه $t_1 = 1s$ ، $t_2 = 1/5\ s$ به دست می‌آوریم، در این صورت داریم؛

$$\bar{v} = \frac{6-4}{1/5-1} = 1/2\ m/s$$

هر چند هنوز اندازهٔ سرعت را در لحظه $t = 1s$ نداریم ولی سرعت متوسطی که به دست آورده‌ایم به سرعت در لحظه t_1 نزدیکتر است. بنابراین برای تعیین سرعت در لحظه t_1، فاصله زمانی میان دو مشاهده متوالی مکان را آنقدر کم می‌کنیم تا بی‌نهایت کوچک شود در این صورت Δx هم به صفر نزدیک می‌شود ولی نسبت $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ محدود می‌ماند. بنابراین می‌توان گفت سرعت در یک لحظه همان اندازهٔ سرعت متوسط بین دو لحظهٔ بینهایت نزدیک به هم است. به عبارت دیگر در حدی که $\Delta t \to 0$ میل می‌کند، شیب وتر بین دو نقطه به شیب مماس در لحظهٔ موردنظر نزدیک می‌شود. بنابراین برای تعیین سرعت لحظه‌ای از روی نمودار $(x-t)$ در هر زمان بایستی در آن زمان عمودی از محور زمان اخراج کنیم تا نمودار را در نقطه‌ای قطع کند، شیب مماس بر نمودار در آن نقطه همان اندازهٔ سرعت در لحظه موردنظر است؛

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

گاهی می‌گویند اندازهٔ سرعت لحظه‌ای مشتق مسافت است نسبت به زمان یعنی:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$x_2 - x_1 = vt \leftarrow v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \bar{v} = v$ حرکت یکنواخت ← اندازه و جهت سرعت ثابت است

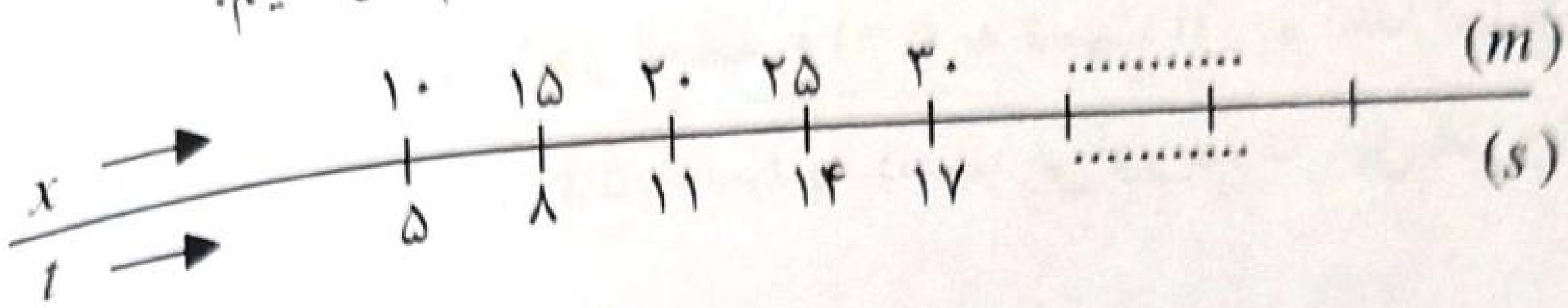
$x = vt + x_0$ معادله حرکت یکنواخت

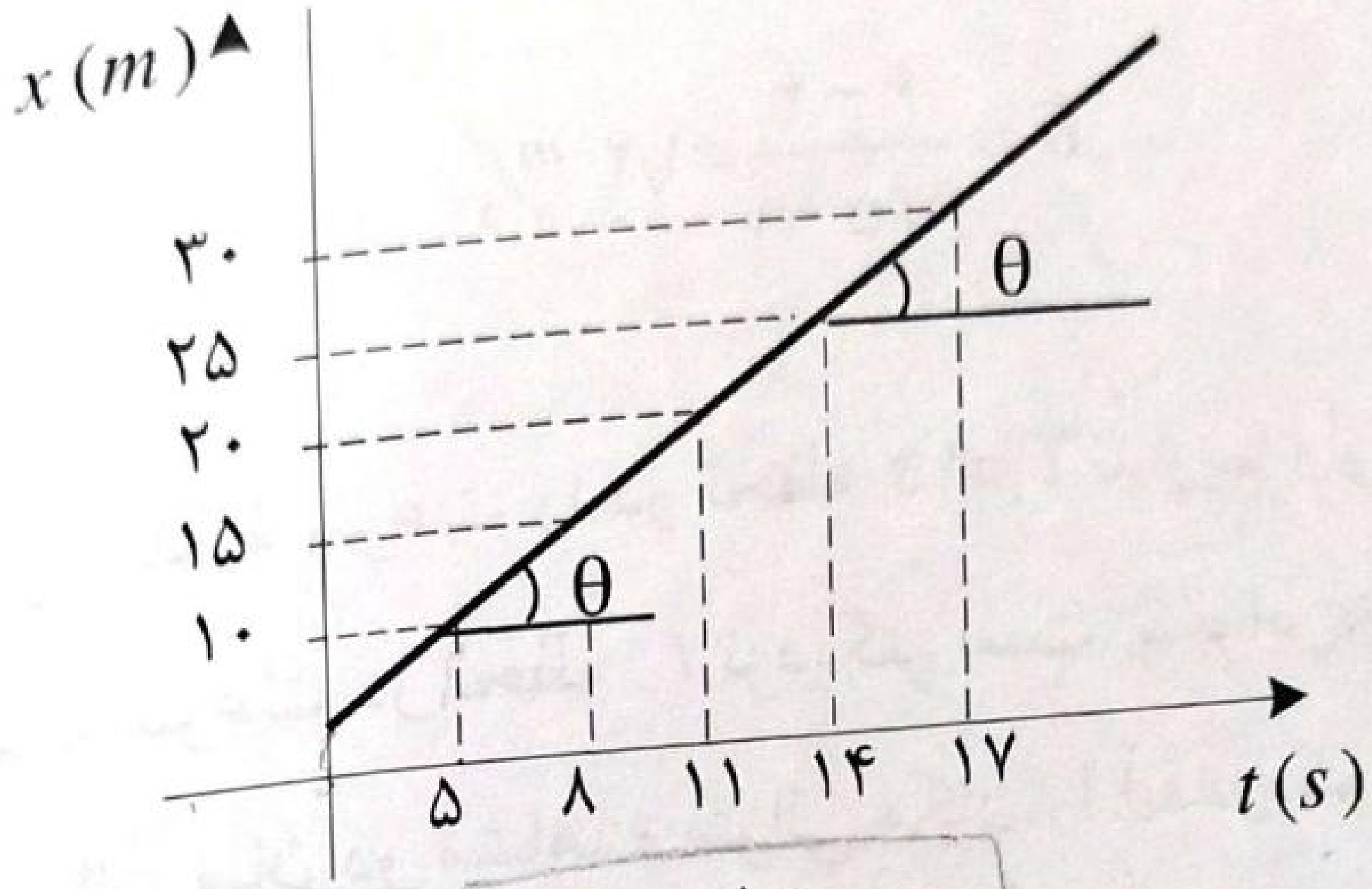
۲-۹ حرکت یکنواخت مستقیم الخط

درحرکتی یک بعدی، هرگاه متحرکی در زمان‌های مساوی مسافت‌های مساوی را طی کند، حرکتش را یکنواخت مستقیم‌الخط می‌نامیم. در **شکل ۲-۱۹** برای تغییر موقعیت‌های

اگر متحرک در جهت x حرکت کند v را با علامت (-) در نظر می‌گیریم

مساوی متحرک در زمان‌های متوالی نمودار $(x-t)$ را رسم کرده‌ایم؛





$$tg\,\theta = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v$$

شکل ۲-۱۹ نمودار $(x-t)$ برای حرکت مستقیم‌الخط یکنواخت فرضی

این نمودار خطی است با شیب ثابت، یعنی اندازهٔ سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای یعنی شیب وتر بین دو نقطه و شیب مماس بر نمودار در هر لحظه، یکسان است. به عبارتی؛ $\bar{V}=V$ و بنابراین $v=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$.

اگر در لحظهٔ $t_1=0$ متحرک در موقعیت x_0 (موقعیت اولیه) ودر لحظه $t_2=t$ متحرک در موقعیت x باشد، معادلهٔ حرکت یکنواخت مستقیم‌الخط عبارت خواهد بود از:

$$v=\frac{x-x_0}{t} \Rightarrow x=Vt+x_0$$

که مثل **شکل ۲-۱۹** نمودار $(x-t)$ از مبداء نمی‌گذرد و در صورتی که در لحظهٔ $t=0$ متحرک در مبداء مکان باشد یعنی $x_0=0$، معادله به صورت زیر است؛

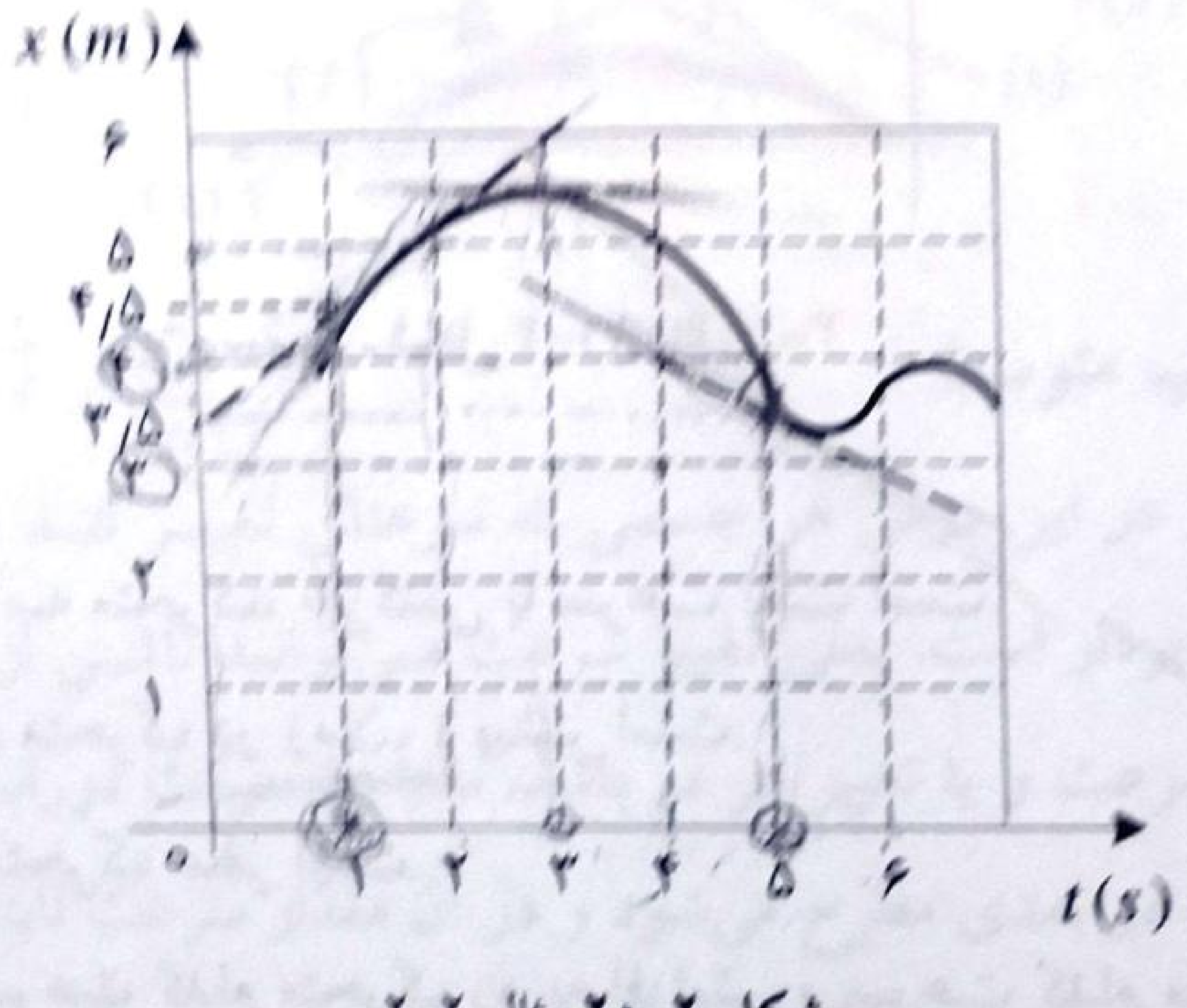
$$x=vt$$

که در این صورت نمودار $(x-t)$ خط مستقیم و از مبداء می‌گذرد.

مثال ۲-۲: در شکل ۲-۲۰ نمودار ($x-t$) را برای حرکت ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند، نشان می‌دهد. از روی این نمودار:

الف) اندازه سرعت متوسط بین دو لحظهٔ $t_1 = 1\,s$ ، $t_2 = 5\,s$.

ب) سرعت لحظه‌ای را در لحظه‌های $t_1 = 1\,s$ ، $t_2 = 3\,s$ ، $t_3 = 5\,s$ به دست آورید.



شکل ۲-۲۰ مثال ۲-۲

حل: الف) سرعت متوسط $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3/5 - 4/5}{5-1} = \frac{-1}{4} = -0/25\ m/s$

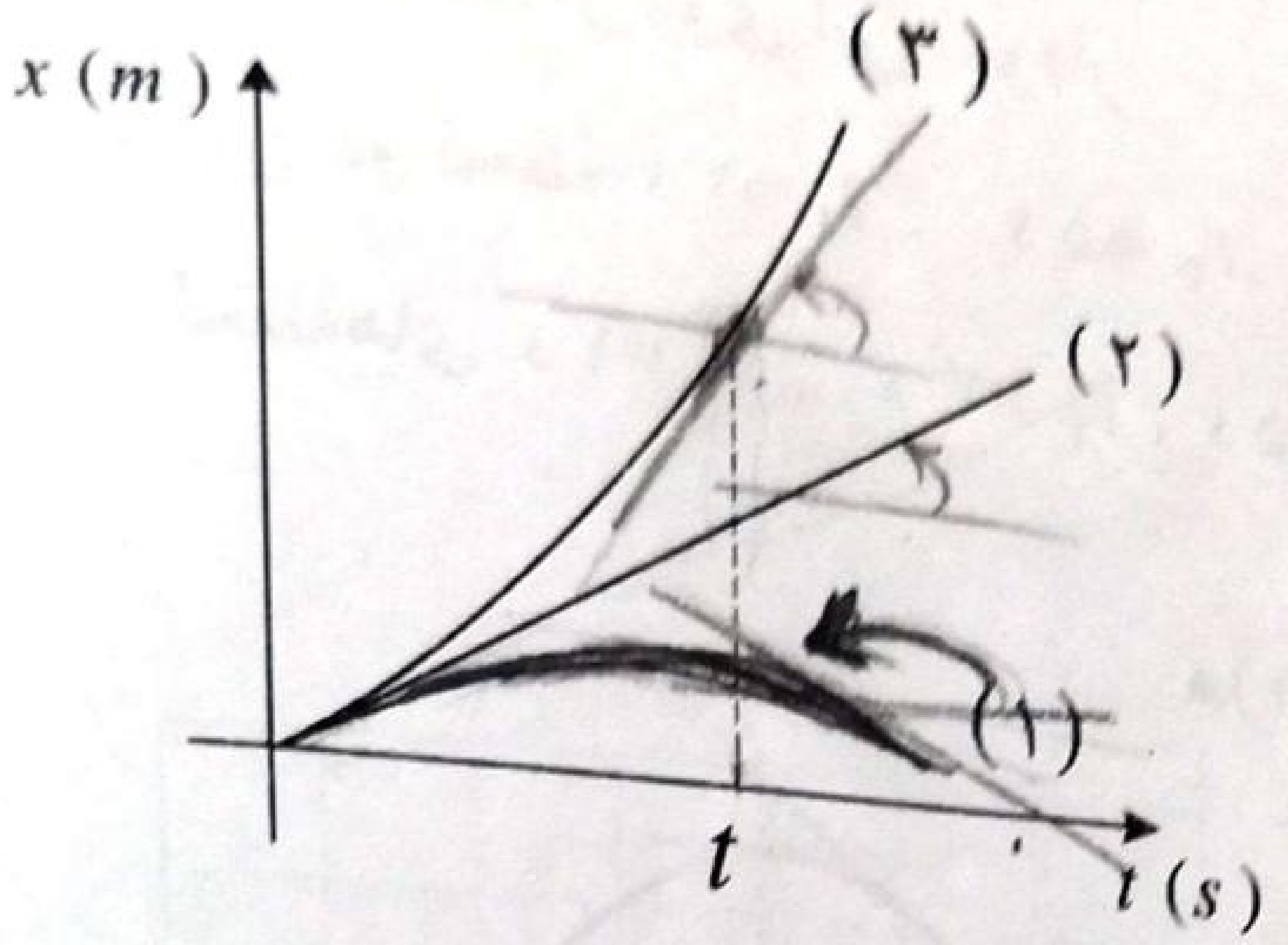
ب) شیب در $t_1 = 1\,s$ لحظه‌ای $v = tg\,\theta = \frac{5-4}{2-0} = 0/5\ m/s$

شیب در $t_2 = 3\,s$، مماس افقی و شیب آن صفر است: $v = 0$ لحظه‌ای

شیب در $t_3 = 5\,s$: لحظه‌ای $v = tg\,\theta = \frac{3-4}{6-4} = -0/5\ m/s$

بنابراین در لحظهٔ $t_3 = 5\,s$ شیب برابر $-0/5\ m/s$ و در فاصله زمانی بین $t_1 = 1\,s$ و $t_3 = 5\,s$ جهت سرعت عوض شده به طوری که در لحظهٔ $t_1 = 1\,s$ سرعت مثبت و برابر $0/5\ m/s$ بوده سپس سرعتش کم شده و در $t_2 = 3\,s$ برای لحظه‌ای ایستاده است پس از آن سرعت منفی پیدا کرده و در $t_3 = 5\,s$ سرعتش به $-0/5\ m/s$ رسیده است.

(مثال ۲-۳.) در **شکل ۲-۲۱**، نمودار $(x-t)$ برای حرکت سه متحرک رسم شده است:



شکل ۲-۲۱ مثال ۲-۳

الف) کدامیک از سه متحرک، حرکتش با سرعت ثابت است.

ب) سرعت کدام متحرک در زمان t بیشتر است.

ج) شتاب کدام متحرک صفر است.

د) تا لحظهٔ t، سرعت کدام متحرک رو به افزایش و سرعت کدام متحرک رو به کاهش است.

هـ) در مورد سرعت متحرک (۱) بعد از لحظه t توضیح دهید.

و) نمودارهایی تقریبی برای سرعت- زمان سه متحرک رسم کنید.

حل: الف) متحرک ۲، زیرا شیب نمودار $(x-t)$ برای این متحرک ثابت است.

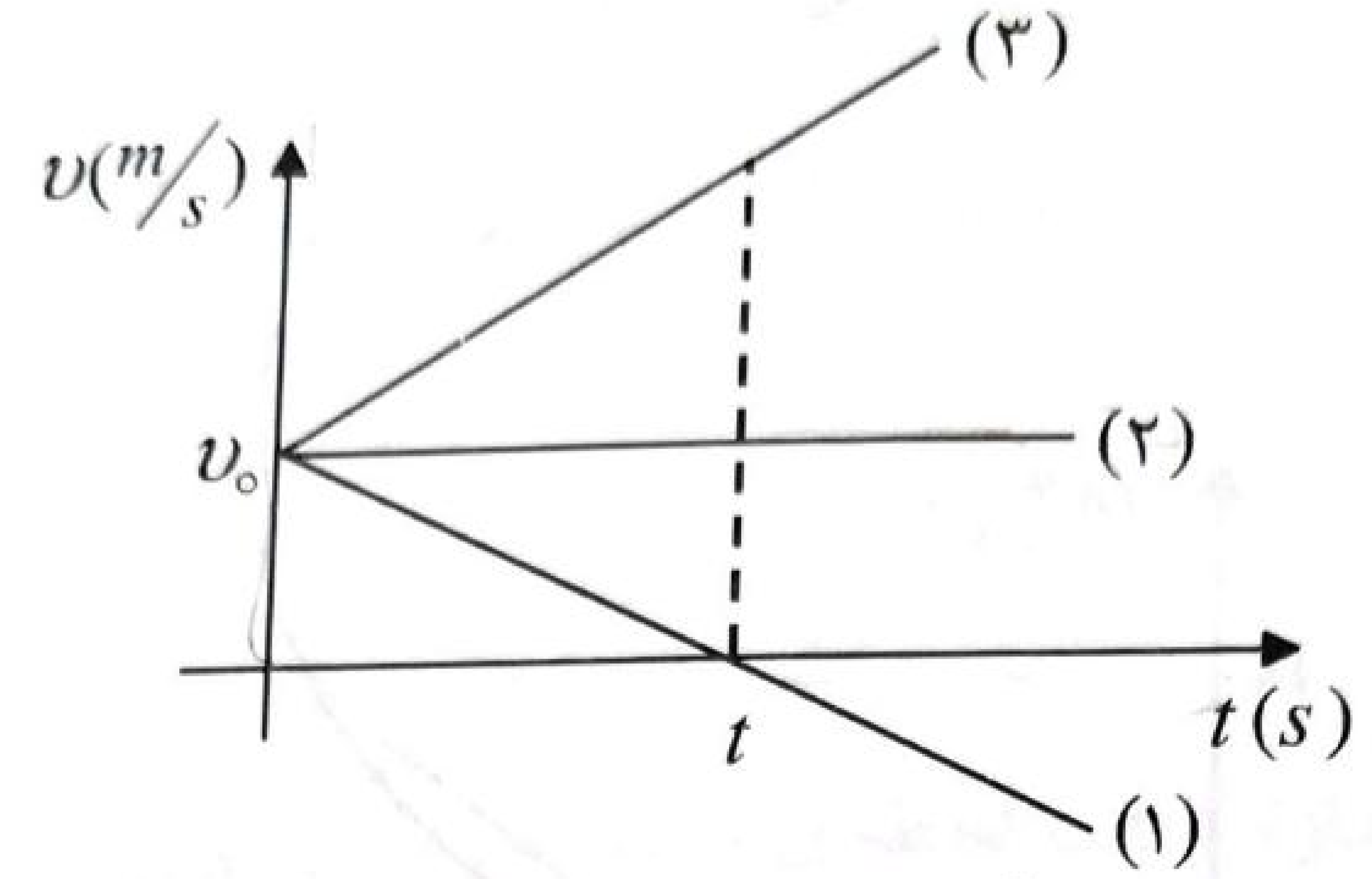
ب) متحرک ۳، زیرا سرعت متحرک در لحظهٔ t صفر و شیب نمودار ۳ از شیب نمودار ۲ در لحظهٔ t بیشتر است.

ج) متحرک ۲، زیرا سرعتش ثابت است.

د) سرعت متحرک ۱ رو به کاهش، سرعت متحرک ۲ ثابت و سرعت متحرک ۳ رو به افزایش است.

هـ) سرعت متحرک ۱ در لحظهٔ t برابر صفر است زیرا شیب مماس بر نمودار بر این لحظه صفر است. از این لحظه به بعد شیب نمودار در جهت عکس زیاد می‌شود یعنی متحرک ۱ با افزایش سرعت در جهت عکس محور xها در حرکت است.

و)



حرکت با شتاب ثابت:

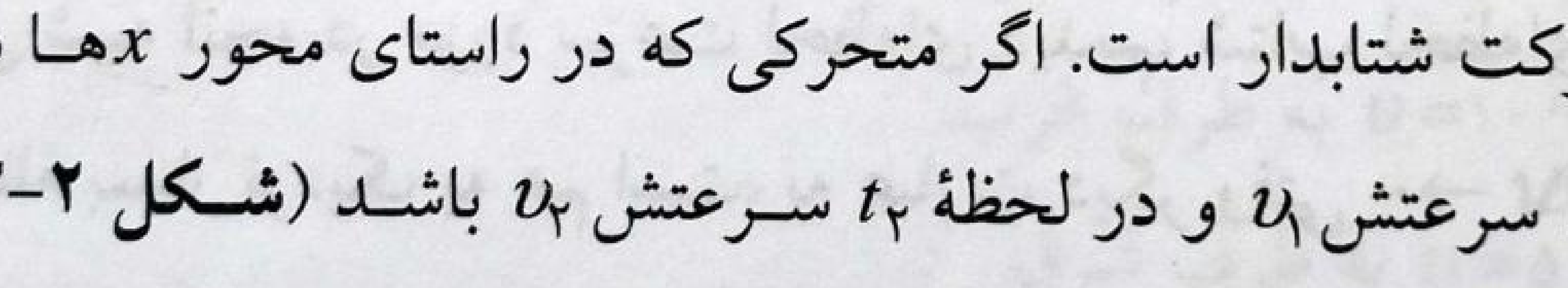
$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$
$v = at + v_0$
$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$
$\bar{v} = \frac{v+v_0}{2}$ یا $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
$\Delta x = (\frac{v+v_0}{2})\Delta t$

۲-۱۰ شتاب و شتاب متوسط

شتاب یعنی عجله ولی در این درس هر جسمی که سرعتش تغییر کند دارای حرکت شتابدار است. سرعت بردار است. یعنی تغییر سرعت می‌تواند ناشی از تغییر مقدار سرعت، تغییر جهت سرعت و یا تغییر هر دو باشد. مثلاً در حرکت دورانی یکنواخت که در بحث سینماتیک دو بعدی مطرح می‌شود و در آن مقدار سرعت ثابت و جهت آن تغییر می‌کند، حرکت شتابدار است. اگر متحرکی که در راستای محور xها در حرکت است در لحظهٔ t_1 سرعتش v_1 و در لحظهٔ t_2 سرعتش v_2 باشد (**شکل ۲-۲۲**) شتاب متوسط متحرک در فاصله زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ عبارت است از:

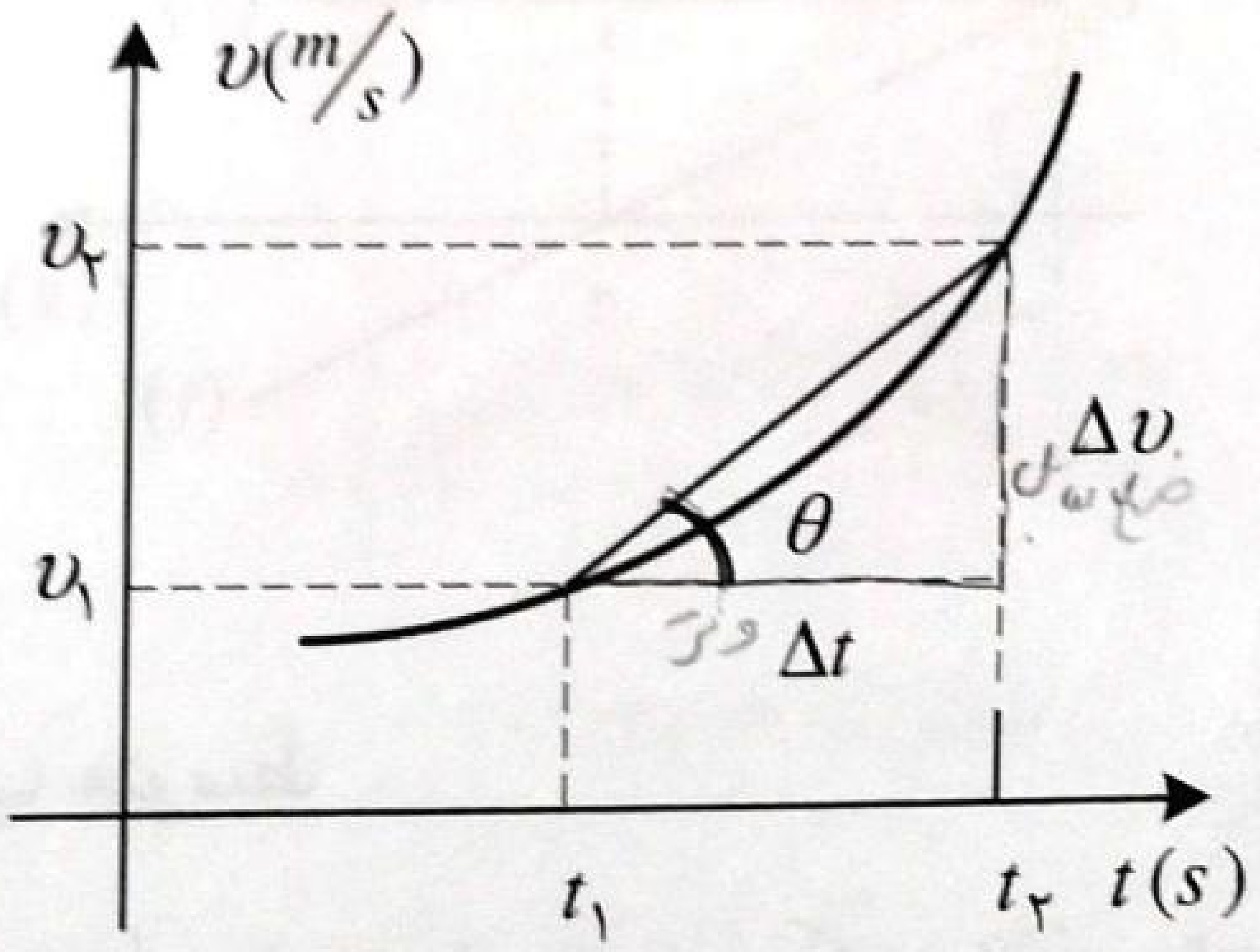
$$\vec{\bar{a}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (m/s^2)$$

که در آن $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$، بردار تغییر سرعت متحرک در فاصله زمانی Δt است. دیده می‌شود که شتاب متوسط هم کمیتی برداری است و جهت آن در جهت بردار تغییر سرعت و اندازهٔ آن؛ $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ است.



شکل ۲-۲۲ شتاب متوسط

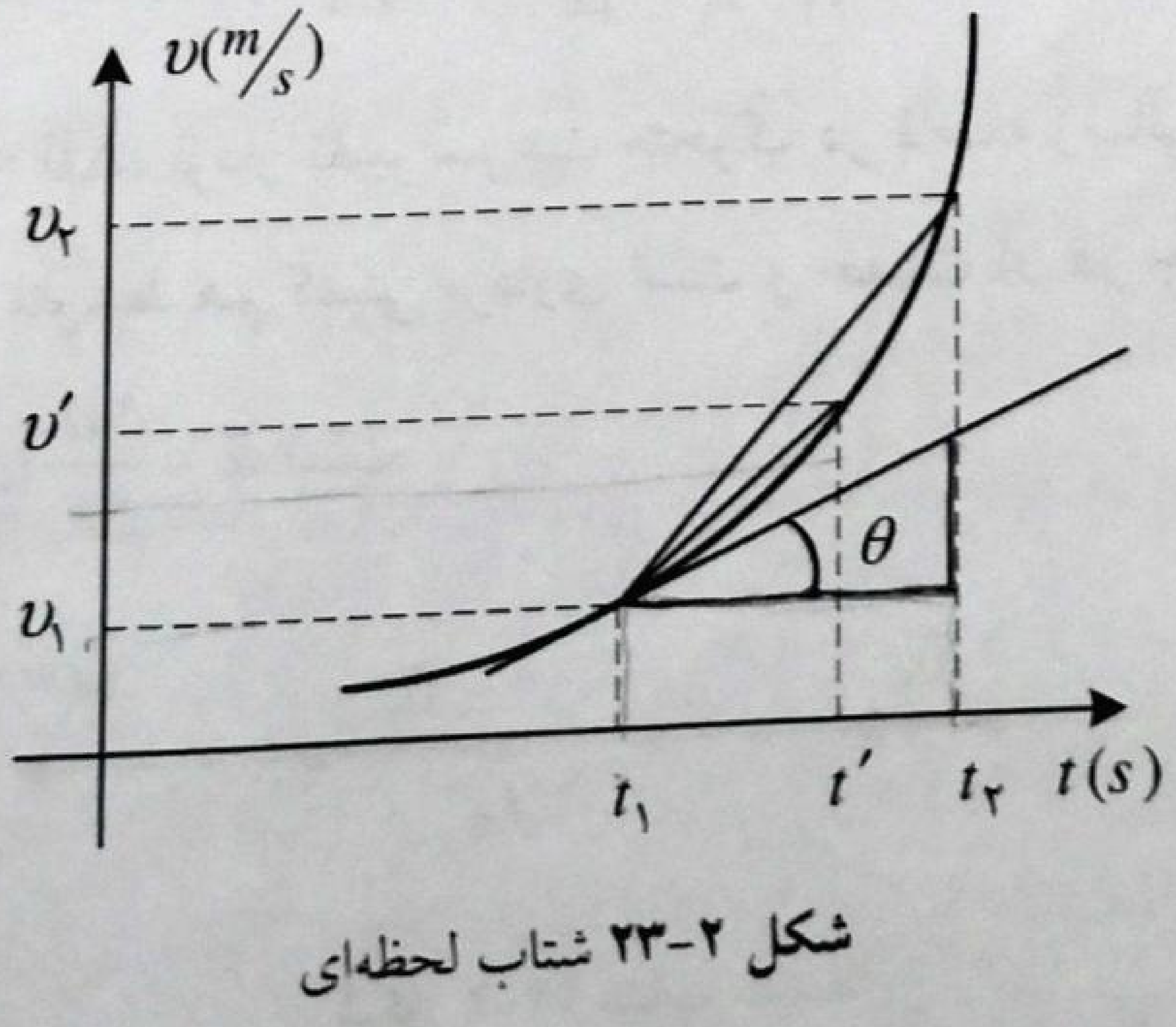
اندازهٔ شتاب متوسط متحرک **شکل ۲-۲۲**، را مـی‌تـوانیم از روی شـیب بـین دو نقطه در نمودار $(v-t)$ تعریف کنیم، یعنی: $\overline{v} = tg\,\theta = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$



شکل ۲-۲۲. اندازهٔ شتاب متوسط از روی نمودار $(v-t)$

۲-۱۱ شتاب لحظه‌ای

با استدلالی شبیه آنچه در مورد سرعت لحظه‌ای دیدیم، شتاب لحظه‌ای، شتاب متوسـط بین دو لحظهٔ بسیار نزدیک به هم است، به عبارت دیگر وقتی $\Delta t \to 0$ میل کند، شـیب وتر بین دو نقطه در نمودار $(v-t)$ به شیب مماس در لحظهٔ موردنظر نزدیک مـی‌شـود (**شکل ۲-۲۳**).



شکل ۲-۲۳ شتاب لحظه‌ای

دو

بنابراین برای تعیین شتاب لحظه‌ای از روی نمودار $(v-t)$ در هر زمان، بایستی در آن زمان عمودی از محور زمان رسم کنیم تا نمودار را در نقطه‌ای قطع کند. شیب مماس بر نمودار در آن نقطه همان شتاب در لحظه مورد نظر است، یعنی:

$$a = \lim_{\Delta t \to ۰} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$$

می‌توان گفت: اندازهٔ شتاب لحظه‌ای مشتق سرعت است نسبت به زمان، یعنی:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

مثال۲-٤. اتومبیلی در لحظهٔ $t_۰ = ۰$ با سرعت $۱۰\ m/s$ به طرف شرق در حرکت است. می‌خواهیم شتاب متوسط این اتومبیل را بین زمان $t_۰ = ۰$ و هر یک از لحظه‌های زیر که در آنها سرعت اتومبیل مشخص شده است، پیدا کنیم.

الف. $t = ۲\ s$, $v = ۱۵\ m/s$ به طرف شرق.

ب. $t = ۱۰\ s$, $v = ۱۰\ m/s$ به طرف غرب.

ج. $t = ۵\ s$, $v = ۵\ m/s$ به طرف شرق.

د. $t = ۲۰\ s$, $v = ۲۰\ m/s$ به طرف غرب.

حل: اگر $x+$ را جهت شرق بگیریم، در هر مورد باید $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ را حساب کنیم:

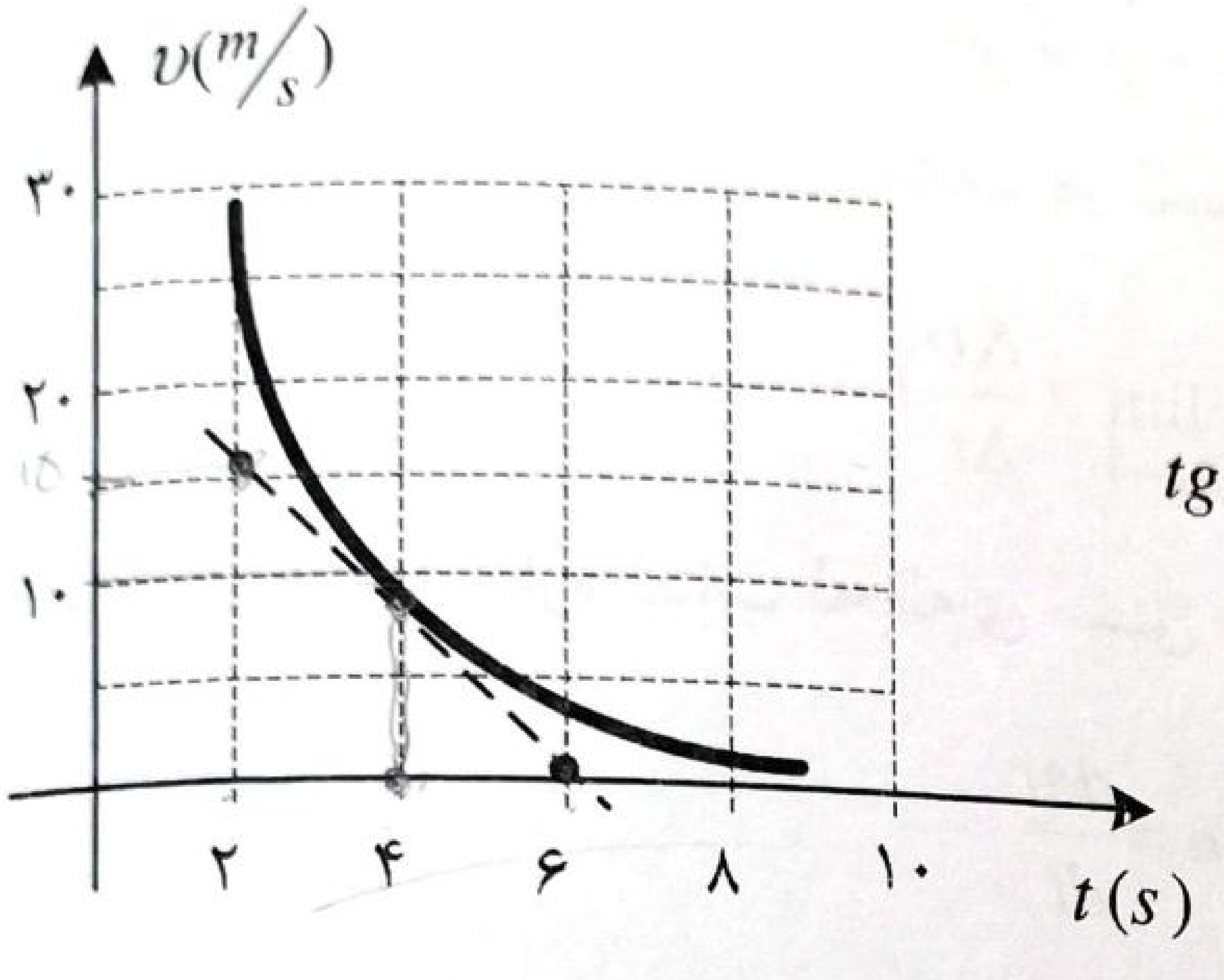
الف. $\bar{a} = \frac{۱۵-۱۰}{۲} = +۲/۵\ m/s^۲$، مقدار سرعت تغییر می‌کند.

ب. $\bar{a} = \frac{-۱۰-۱۰}{۱۰} = -۲\ m/s^۲$، جهت سرعت تغییر می‌کند.

ج. $\bar{a} = \frac{۵-۱۰}{۵} = -۱\ m/s^۲$، مقدار و جهت سرعت تغییر می‌کند.

د. $\bar{a} = \frac{-۲۰-۱۰}{۲۰} = -۱/۵\ m/s^۲$، مقدار و جهت سرعت تغییر می‌کند.

مثال۲-۵. نمودار $(v-t)$ حرکت اتومبیلی به صورت زیر است، شتاب را در لحظهٔ $t=4\,sec$ به دست آورید.

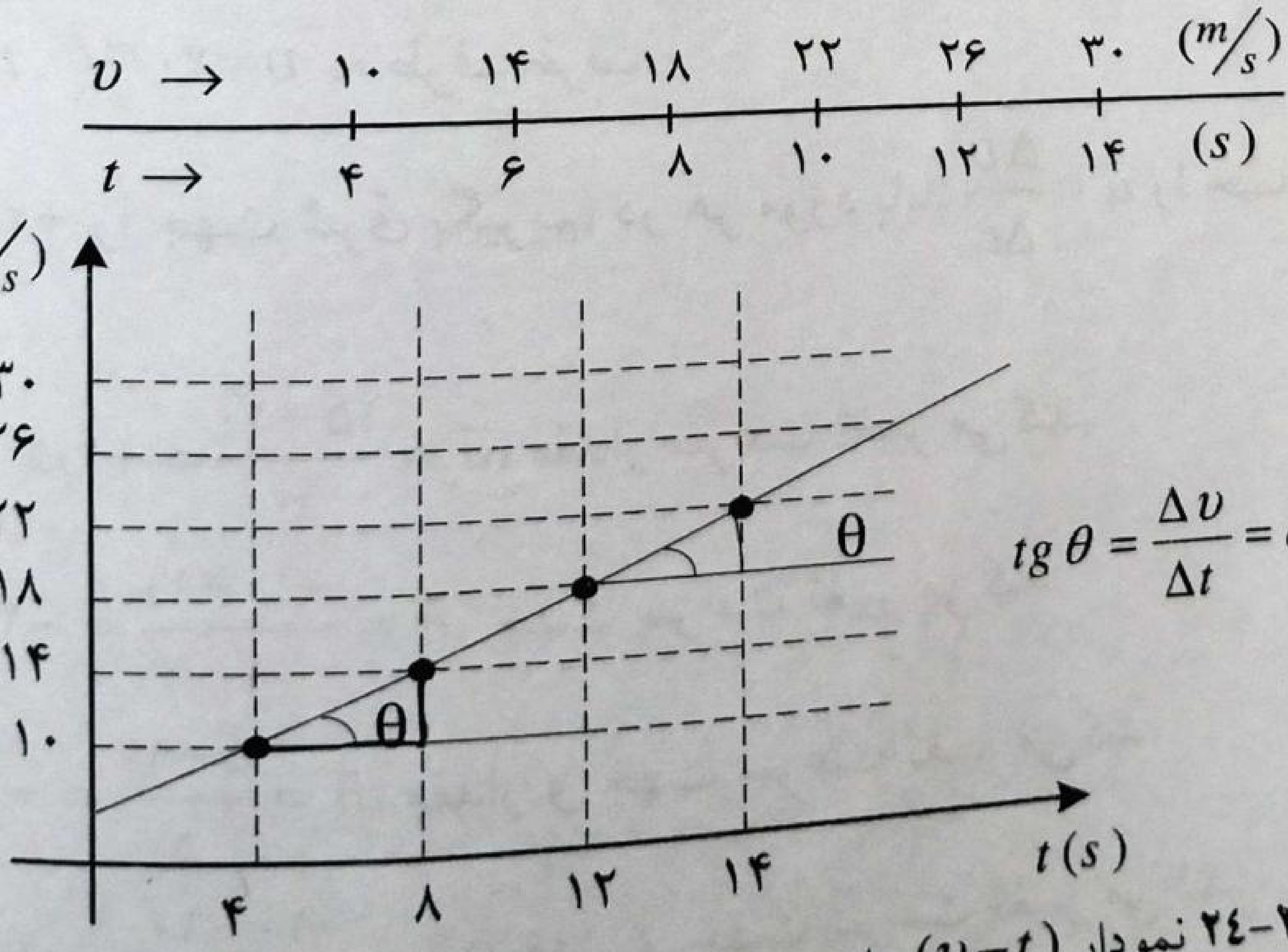


حل:

$$tg\,\theta=\frac{0-15}{6-2}=-3/75\ \ m/s^2$$

۲-۱۲ حرکت با شتاب ثابت بر روی خط مستقیم

در حرکت شتابدار بر روی خط مستقیم که در آن سرعت تغییر می‌کند، ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که سرعت جسم در زمان‌های مساوی به طور یکسان افزایش یابد، در مثال فرضی **شکل ۲-۲٤**، دیده می‌شود که نمودار $(v-t)$ برای حرکت این جسم خطی با شتاب ثابت است. به عبارت دیگر حرکت جسم با شتاب ثابت (و مثبت) صورت می‌گیرد و حرکت تند شونده است.



$$tg\,\theta=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\vec{a}=a\ \ ,\ a>0$$

شکل ۲-۲٤ نمودار $(v-t)$برای حرکت با شتاب ثابت (ومثبت) نوعی

پس شتاب حرکت ثابت است یعنی فقط یک شتاب داریم، بنابراین شتاب متوسط

بین هر دو لحظه مثل $t_\circ$, t همان شتاب ثابت حرکت جسم است. اگر $v_\circ$ سرعت جسم در لحظهٔ $t_\circ$ و v سرعت جسم در لحظهٔ t باشد، شتاب ثابت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\bar{a} = a = \frac{v - v_\circ}{t - t_\circ}$$

با فرض اینکه $t_\circ = ۰$ باشد، معادلهٔ سرعت-زمان حرکت با شتاب ثابت عبارت است از:

$$v = at + v_\circ$$

که اگر در لحظهٔ $t_\circ = ۰$ ، $v_\circ = ۰$ باشد، یعنی جسم در حال سکون باشد، نمودار $(v-t)$ از مبداء می‌گذرد و معادلهٔ سرعت به صورت $v = at$ خواهد بود با توجه به این که بردار سرعت تابعی خطی از زمان است، سرعت متوسط همان میانگین سرعت‌های اولیه و نهایی بین دو نقطه است، به عبارت دیگر در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط بین دو نقطه را می‌توان از دو رابطهٔ $\bar{v} = \frac{x - x_\circ}{t}$ و یا $\bar{v} = \frac{v + v_\circ}{۲}$ به دست آورد که با قراردادن $v = at + v_\circ$ در رابطهٔ اخیر داریم؛ $\bar{v} = \frac{at + ۲v_\circ}{۲}$ و با مساوی قرار دادن سمت راست این رابطه با رابطهٔ $\bar{v} = \frac{x - x_\circ}{t}$ داریم:

$$\frac{x - x_\circ}{t} = \frac{at + ۲v_\circ}{۲}$$

در نتیجه؛

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t + x_\circ$$

که معادله حرکت یا رابطهٔ موقعیت-زمان در حرکت مستقیم‌الخط با شتاب ثابت است.

اگر در $t = ۰$، متحرک در مبداء مکان، $x_\circ = ۰$ باشد در این صورت معادله حرکت عبارت است از:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t$$

هر حرکت با شتاب ثابت بین دو نقطه با سرعت‌های $v, v_\circ$ را می‌توان حرکت یکنواختی دانست که سرعت آن میانگین سرعت‌های بین دو نقطه است، بنابراین رابطهٔ موقعیت-زمان در حرکت شتابدار بین دو نقطه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x=\bar{v}t+x_0 \qquad \text{یا} \qquad x=\left(\frac{v+v_0}{2}\right)t+x_0$$

که با قراردادن t از رابطهٔ $v=at+v_0$ در آن نتیجه می‌شود:

$$x=\left(\frac{v+v_0}{2}\right)\left(\frac{v-v_0}{a}\right)+x_0 \;\Rightarrow\; v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$$

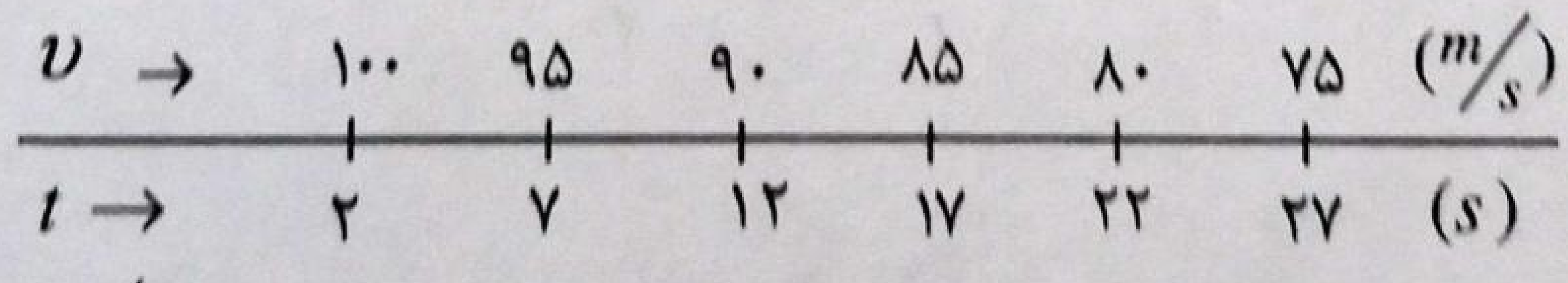
که رابطهٔ مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت است. اگر در لحظهٔ $t_0=0$، $x_0=0$ فرض شود، داریم:

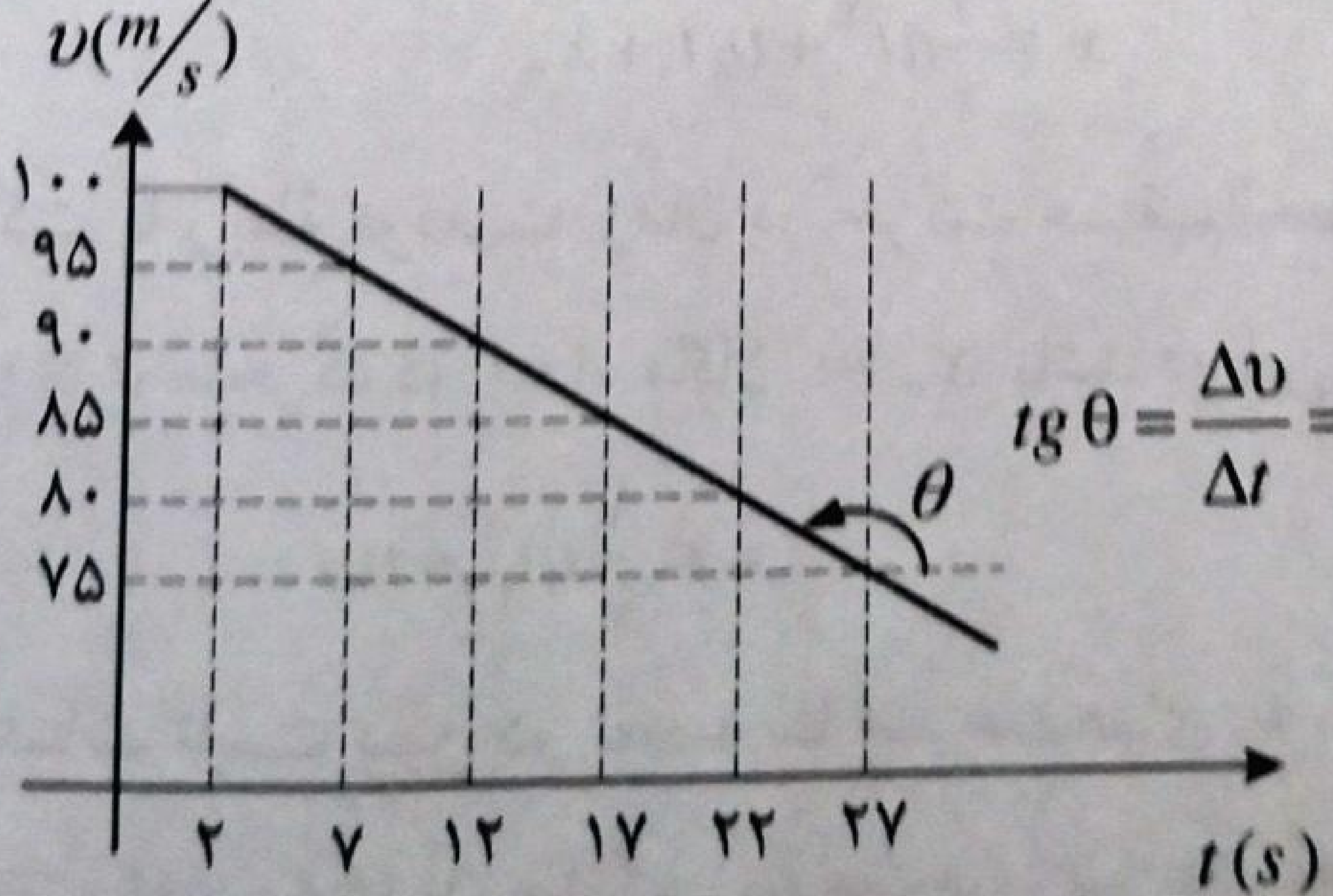
$$v^2-v_0^2=2ax$$

پرسش۶. رابطهٔ مستقل از زمان را با استفاده از دو رابطهٔ زیر نیز به دست آورید:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \;,\; v=at+v_0$$

هرگاه در حرکت شتابدار بر روی خط مستقیم که در آن سرعت تغییر می‌کند، حالتی را در نظر بگیریم که سرعت جسم در زمان‌های مساوی به طور یکسان کاهش یابد، در مثال نوعی **شکل ۲-۲۵**، دیده می‌شود که نمودار $(v-t)$ برای حرکت این جسم نیز خطی مستقیم با شیب ثابت است. به عبارت دیگر حرکت جسم با شتاب ثابت (و منفی) صورت می‌گیرد و حرکت کندشونده است.





$$tg\,\theta=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\bar{a}=a \quad , \quad a<0$$

شکل ۲-۲۵ نمودار $(v-t)$ برای حرکت با شتاب ثابت (ومنفی) نوعی

روابط مورد استفاده برای حرکت‌های تندشونده $(a>۰)$ و کندشونده $(a<۰)$:

الف. تندشونده(در $t_{\circ}=۰$, $x_{\circ}=۰$ فرض شده است):

$$x=\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_{\circ}t \quad , \quad v=at+v_{\circ} \quad , \quad v^{۲}-v_{\circ}^{۲}=۲ax$$

ب. کندشونده(در $t_{\circ}=۰$, $x_{\circ}=۰$ فرض شده است):

$$x=-\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_{\circ}t \quad , \quad v=-at+v_{\circ} \quad , \quad v^{۲}-v_{\circ}^{۲}=-۲ax$$

درصورتی که حرکت کندشونده‌ای منجر به توقف شود، یعنی سرعت نهایی صفر شود، در این صورت برای زمان تا توقف و مسافت تا توقف در حرکت کندشونده داریم:

$$v=-at+v_{\circ} \quad , \quad ۰=-at+v_{\circ} \quad \Rightarrow t=\frac{v_{\circ}}{a}$$

$$v^{۲}-v_{\circ}^{۲}=-۲ax \quad , \quad ۰-v_{\circ}^{۲}=-۲ax \quad \Rightarrow x=\frac{v_{\circ}^{۲}}{۲a}$$

مثال۲-۶. هواپیمایی با سرعت $۷۲\ {km}/{h}$ $(۲۰\ {m}/{s})$ بر روی باند مستقیم فرودگاهی می‌نشیند و پس از ۱۰ ثانیه سرعتش به $۳۶\ {km}/{h}$ $(۱۰\ {m}/{s})$ می‌رسد، در صورتی که حرکتش با سرعت ثابت باشد. مطلوب است:

الف. مسافتی که در ده ثانیه اول طی کرده است.

ب. زمان و مسافت طی شده از لحظهٔ فرود تا هنگام توقف.

حل: الف.

$$v=-at+v_{\circ} \Rightarrow ۱۰=-۱۰a+۲۰ \Rightarrow a=۱\ {m}/{s^{۲}}$$

$$x=-\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_{\circ}t \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}(۱)(۱۰)^{۲}+۲۰(۱۰)=۱۵۰\,m$$

ب.

$$t=\frac{v_{\circ}}{a} \Rightarrow t=\frac{۲۰}{۱}=۲۰\,s \quad , \quad x=\frac{v^{۲}}{۲a} \Rightarrow x=\frac{(۲۰)^{۲}}{۲(۱)}=۲۰۰\,m$$