۴) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-7}{x^2-9}}$ $\geq 0$, $x^2-9 \neq 0$

حل) چون فرجه زوج است پس عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد و چون عبارت زیر رادیکال کسری می باشد پس باید مخرج کسر مخالف صفر هم باشد.

$$\frac{x-7}{x^2-9} \geq 0$$

$x-7=0 \quad \boxed{x=7}$

$x^2-9=0 \quad (x-3)(x+3)=0 \quad \boxed{x=3} \quad \boxed{x=-3}$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $3$ | | $7$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-7$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x^2-9$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| کل کسر | $-$ | تعریف نشده | $+$ | تعریف نشده | $-$ | $0$ | $+$ |
| | | | ج | | | | ج |

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3 \text{ یا } x \geq 7\}$

محاسبهٔ برد یک تابع از روی ضابطهٔ آن:

برد تابع $y=f(x)$ محدوده تغییرات $y$ می باشد که با $R_f$ نمایش می دهند، یک راه بدست آوردن برد توابع این است که $x$ را برحسب $y$ از روی ضابطهٔ تابع بدست آوریم، آنگاه با بدست آوردن دامنهٔ رابطهٔ بدست آمده، با توجه به محدودیت‌های موجود، حدود $y$ را که همان برد تابع است پیدا کنیم.

مثال: برد و دامنهٔ تابع زیر را بدست آورید:

$$y = f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

$x-2 \neq 0 \quad x \neq 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ دامنه تابع

برای پیدا کردن برد ابتدا طرفین وسطین می کنیم

$\dfrac{y}{1} = \dfrac{x-1}{x-2} \Rightarrow x-1 = y(x-2)$

$x-1 = yx - 2y \Rightarrow yx - x = 2y - 1 \Rightarrow x(y-1) = 2y-1 \Rightarrow$

$x = \dfrac{2y-1}{y-1} \Rightarrow y-1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1 \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{1\}$ برد تابع

نورخواه

مثال) دامنهٔ توابع زیر را بدست آورید.

1) $y = \dfrac{3x^2 - 5x + 7}{x^2 + 5x + 6}$

حل) باید فقط ریشه‌های مخرج را بدست آورد و از دامنه (IR) کم کنیم. (( برای پیدا کردن دامنه به صورت کسر کاری نداریم ))

$x^2 + 5x + 6 = 0$ (اتحاد جمله مشترک) $\Rightarrow (x+3)(x+2) = 0$

$x + 3 = 0 \quad \boxed{x = -3} \qquad x + 2 = 0 \quad \boxed{x = -2} \qquad \boxed{D_f = \mathbb{R} - \{-2, -3\}}$

2) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x^2-1}}$

حل) چون فرجه فرد است، رادیکال تاثیری روی دامنه ندارد پس باید فقط دامنهٔ عبارت زیر رادیکال را بدست آوریم $\Rightarrow$ تابع زیر رادیکال کسری است $\Rightarrow$ مخرج کسر را مخالف صفر قرار می‌دهیم

$x^2 - 1 \neq 0 \qquad (x-1)(x+1) \neq 0 \qquad \boxed{x \neq 1} \quad \boxed{x \neq -1}$

$\Rightarrow \boxed{D_f = \mathbb{R} - \{\mp 1\}}$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1x - 12} \geqslant 0$

حل: چون فرجه ۲ است پس عبارت زیر رادیکال باید مساوی یا بزرگتر از صفر باشد.

$x^2 - x - 12 \geqslant 0$

$y = x^2 - x - 12 = 0$ (اتحاد جمله مشترک) $\Rightarrow (x-4)(x+3) = 0 \quad \boxed{x = 4} \quad \boxed{x = -3}$

برای پیدا کردن جواب باید تعیین علامت کنیم چون معادله درجهٔ دوم است

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | | ج. | | | | ج. | |

$\Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3$ یا $x \geqslant 4\}$

۳) $y^2-3y=x$ مثال نقض (حل

| $x$ | $0$ | $0$ |
|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $3$ |

×

$y(y-3)=0$ یعنی، ازای یک $x$ دو مقدار برای $y=3$ و $y=0$ حاصل شد در نتیجه این رابطه تابع نیست.

نکته: معمولاً رابطه‌هایی که در آن $y$ با توان زوج و یا $y$ درون قدر مطلق قرار گرفته است، تابع نمی‌باشند.

تعریف دامنه و محاسبه آن از روی ضابطه تابع:

برای تابع حقیقی $y=f(x)$ مجموعه‌ای از اعداد حقیقی که می‌توانند به جای $x$ در ضابطه تابع $f$ قرار گیرند را دامنهٔ تابع می‌گویند که با $D_f$ نمایش می‌دهند.

نکته:

۱) دامنهٔ توابع چندجمله‌ای یا خطی برابر با مجموعه اعداد حقیقی است.

مثال: دامنهٔ توابع زیر را مشخص کنید.

۱) $f(x)=y=\frac{3}{2}x^2+3$ ج) $D_f=\mathbb{R}$

۲) $f(x)=y=\sqrt{2}x^5+\frac{-5}{2}x^2-8$ جواب) $D_f=\mathbb{R}$

۲) برای محاسبهٔ دامنهٔ توابع کسری باید ریشه‌های مخرج را از مجموعهٔ دامنه خارج کنیم.

۳) برای محاسبهٔ دامنهٔ توابع رادیکالی (یعنی متغیر زیر رادیکال باشد) اگر فرجه فرد باشد، دامنه تابع با دامنهٔ عبارت زیر رادیکال یکسان است ولی اگر فرجه زوج باشد، دامنه تابع برابر است با مقادیری که به ازای آنها عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر قرار گیرد. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال: اگر مجموعه‌ی $f=\{(2,\alpha-\beta),(2,3),(1,\alpha+\beta),(1,-1)\}$ تابع باشد، $\alpha$ و $\beta$ را بیابید:

$(2,\alpha-\beta)=(2,3)$

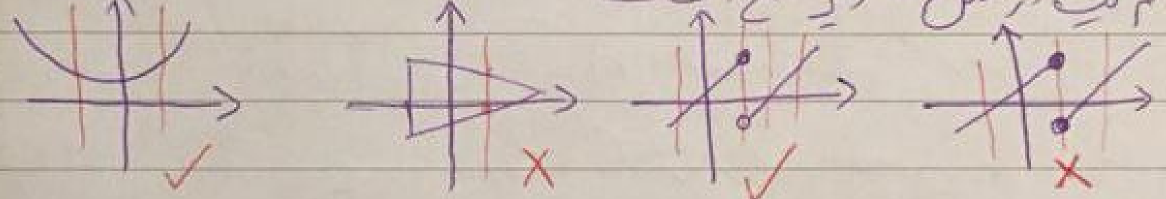
$(1,\alpha+\beta)=(1,-1)$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha-\beta=3\\ \alpha+\beta=-1\end{cases} \Rightarrow 2\alpha=2 \quad \boxed{\alpha=1}$$

$$\alpha+\beta=-1 \Rightarrow 1+\beta=-1 \Rightarrow \beta=-1-1=\boxed{-2}$$

تشخیص یک تابع از روی نمودار: یک نمودار یا یک منحنی وقتی تابع است که هر خط موازی محور $y$ ها «خط قائم»، حداکثر آن را در یک نقطه قطع کند یعنی هیچ دو نقطه‌ای طول یکسان نداشته باشند.

مثال: کدام یک از شکل‌های زیر تابع است؟



نکته: تعداد کل توابع که از یک مجموعه‌ی $a$ عضوی به یک مجموعه‌ی $b$ عضوی می‌توان تعریف کرد برابر است با $b^a$

مثال: از مجموعه‌ی $A=\{d,e,h\}$ به مجموعه‌ی $B=\{2,4\}$ چند تابع می‌توان ساخت؟ جواب: $2^3=8$

مثال: آیا تابعی وجود دارد که تعداد عضوهای برد آن از تعداد عضوهای دامنه آن بیشتر باشد؟ جواب: خیر در تابعی با دامنه و برد متناهی حتماً باید عضوهای دامنه مساوی و یا بیشتر از عضوهای برد باشد «با استفاده از تعریف تابع».

**تعریف تابع:** یک تابع یک رابطه‌ای از $A \times B$ می‌باشد که در آن به هر عضو از $A$ دقیقاً یک عضو از $B$ نظیر شود، در این صورت $A$ را دامنه و $B$ را هم دامنه می‌گویند.

**یا:** یک مجموعه از زوج های مرتب وقتی تابع می‌باشد که در آن هیچ دو زوج مرتبی دارای مولفهٔ اول یکسان نباشند، یا اگر مولفهٔ اول آنها یکسان باشد مولفهٔ دوم آنها نیز یکسان باشد.

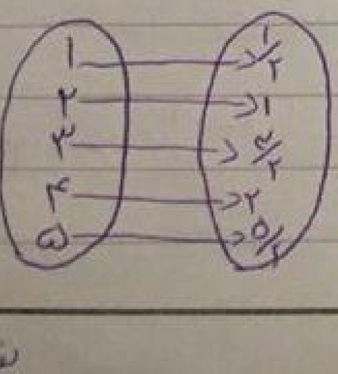
* یک رابطه یا تابع را می‌توان به صورت توصیف کلامی، مجموعهٔ زوج های مرتب، نمودار پیکانی، جدول و نمودار مختصاتی نمایش داد.

**مثال:** رابطهٔ بین اعداد طبیعی کمتر از ۶ و نصف آنها را به صورت زوج مرتب، نمودار پیکانی، جدول و نمودار مختصاتی بنویسید و آیا این رابطه یک تابع است؟ بله تابع است.

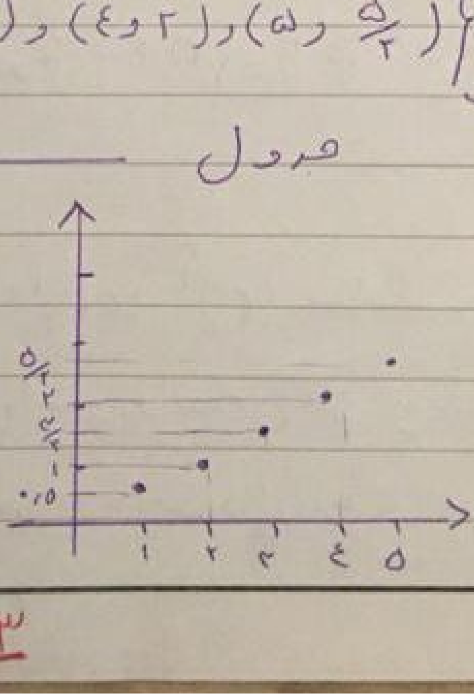
**پاسخ:** $f = \{(1, \frac{1}{2}), (2, 1), (3, \frac{3}{2}), (4, 2), (5, \frac{5}{2})\}$ زوج مرتب

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ |

جدول




پیکانی




نمودار مختصاتی



نورخداه

# تابع

**تعریف زوج مرتب :** هر دوتایی که ترتیب نوشتن در آنها اهمیت داشته باشد که کدام اول باشد و کدام دوم ، زوج مرتب می گوییم . اگر $a$ عضو اول و $b$ عضو دوم آن باشد ، آنرا بصورت $(a,b)$ نشان می دهیم و در آن $a$ را مولفهٔ اول و $b$ را مولفهٔ دوم می نامیم ، بدیهی است که طبق تعریف

اگر $a \neq b$ آنگاه $(a,b) \neq (b,a)$

**تساوی دو زوج مرتب :** دو زوج مرتب وقتی باهم مساوینـد که مولفه های اول آنها باهم مساوی باشند و مولفه های دوم آنها نیز مساوی هم باشند .

---

مثال: اگر رابطهٔ $(x+1,5) = (2,2y-1)$ برقرار باشد $x+y$ کدام است؟

۱) $-4$ ۲) $4$ ۳) $2$ ۴) $-1$

حل:

$x+1=2 \Rightarrow x = 2-1 = \boxed{1}$

$2y-1=5 \Rightarrow 2y = 5+1 = 6 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow \underline{y=3}$ $\quad x+y = \underline{1+3=4}$

---

مثال: اگر دو زوج مرتب $(4, 2a-b)$ و $(a-2b, 8)$ باهم برابر باشند مقدار $b-a$ چقدر است ؟

۱) صفر ۲) $4$ ۳) $-4$ ۴) $2$

حل:

$2a-b=8$

$2a-0=8$

$2a=8$

$\underline{a=4}$

$$\begin{cases} -2(a-2b)=(4)-2 \\ 2a-b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2a}+4b=-\cancel{8} \\ \cancel{2a}-b=\cancel{8} \end{cases}$$

$3b=0 \quad \underline{b=0}$

$b-a = 0-4 = \underline{-4}$

## حاصل ضرب دکارتی:

اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه A در B را به صورت $A \times B$ نمایش می دهیم. این مجموعه شامل زوج مرتبهایی می باشد $(a,b)$ که مولفهٔ اول آنها یعنی a متعلق به مجموعهٔ A و مولفهٔ دوم آنها یعنی b متعلق به مجموعهٔ B می باشد به عبارتی:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

مثال: اگر $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{4,5\}$ باشد مطلوب است:

1) $A \times B$ 2) $B \times A$ 3) $A^2$

حل: 1) $A \times B = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$ (۶ عضو)

2) $B \times A = \{(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$ (۶ عضو)

نتیجه مهم: $A \times B \neq B \times A$ «در حالت کلی»

3) $A \times A = A^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,1),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2)\}$ «۹ عضو»

رابطه: هر زیر مجموعه از حاصل ضرب دکارتی را یک رابطه می گویند

مجموعه های زیر رابطه هایی از مثال (1) $(A \times B)$ بالا می باشند.

$R_1 = \{(1,4),(1,5)\}$

$R_2 = \{(1,4),(2,4),(3,4)\}$

$R_3 = \{(2,5)\}$

$\Rightarrow$ هر یک رابطه ای از $A \times B$ می باشند



نور خدا

دامنه و برد تابع: اگر تابعی به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب باشد، آن‌گاه به مجموعه تمام مؤلفه‌های اول یک تابع دامنه آن تابع و به مجموعه مؤلفه‌های دوم آن برد آن تابع گفته می‌شود. دامنه تابع را با $D_f$ و برد آن‌ها را با $R_f$ نمایش می‌دهند.

مقدار تابع در یک نقطه: اگر $f$ یک تابع و $(x, y) \in f$، آن‌گاه $y$ را مقدار تابع $f$ در نقطه $x$ می‌گوییم و به صورت $y = f(x)$ نمایش می‌دهیم.

مثال: اگر $f$ یک تابع و $f(2) = 0$ و $f(1) = 4$ و $f(-3) = 2$ باشد، $f$ را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

جواب)

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 0 \Rightarrow (2, 0) \in f \\ f(1) = 4 \Rightarrow (1, 4) \in f \\ f(-3) = 2 \Rightarrow (-3, 2) \in f \end{array}\right\} \Rightarrow f = \{(2, 0), (1, 4), (-3, 2)\}$$

نمایش جبری یا ضابطه یک تابع:

اگر رابطه بین مؤلفه‌های اول و دوم تابع $f$ را بتوان به صورت یک عبارت ریاضی یا جبری نشان داد، به آن ضابطه یا نمایش جبری تابع می‌گویند. تابع $f$ از مجموعه $A$ به مجموعه $B$ با ضابطه $f(x)$ را به صورت $\begin{cases} f: A \to B \\ x \to f(x) \end{cases}$ نمایش می‌دهیم.

مثال) اگر $f(x) = x^3 - 2x + 1$ باشد، هر یک از مقادیر زیر را به دست آورید.

$f(\frac{1}{2}) = ?$ جواب: $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 - 2(\frac{1}{2}) + 1 = \frac{1}{8} - 1 + 1 = \boxed{\frac{1}{8}}$

$f(x-1) = ?$ جواب: $f(x-1) = \underbrace{(x-1)^3}_{\text{اتحاد مکعب دوجمله‌ای}} - 2(x-1) + 1 = \boxed{x^3 - 3x^2 + x + 2}$



نورخواه

مثال ۱) اگر $f(2x-1) = 4x^2+2x-3$ (۳) باشد، $f(x)$ را بیابید.

جواب ۱) با تغییر متغیر فرض حل می‌کنیم: یعنی $\boxed{2x-1=t}$ (۱) $\Rightarrow \boxed{x=\frac{t+1}{2}}$ (۲)

حال (۱) و (۲) را در ضابطه (۳) جایگزین می‌کنیم

$$f(t) = 4\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{t+1}{2}\right) - 3 = \cancel{4}\times\left(\frac{t^2+2t+1}{\cancel{4}}\right) + \cancel{2}\left(\frac{t+1}{\cancel{2}}\right) - 3 =$$

$$= t^2 + \underline{2t} + \underline{1} + \underline{t} + \underline{1} - \underline{3} = t^2 + 3t - 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 3x - 1$$

---

مثال: اگر $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$ باشد، ضابطه $f(x)$ کدام است؟

۱) $x^3$ ۲) $\frac{1}{x^3}$ ۳) $x^3 - 3x$ ✓۴) $x^3 + 3x$

جواب: طبق نکات اتحاد مکعب دوجمله‌ای که قبلاً بیان شده بود داریم

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

حال فرض می‌کنیم $x + \frac{1}{x} = t$ پس داریم:

$$f(\underbrace{x+\tfrac{1}{x}}_{t}) = (\underbrace{x+\tfrac{1}{x}}_{t})^3 - 3\cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}}(\underbrace{x+\tfrac{1}{x}}_{t})$$

$$f(t) = t^3 - 3t \Rightarrow \boxed{f(x) = x^3 - 3x}$$

---

مثال: مساحت یک مستطیل برابر ۲۵ متر مربع است. ضابطه‌ای بنویسید که محیط این مستطیل را به عرض مستطیل وابسته کند.

جواب) یعنی باید طول مستطیل را براساس عرض مستطیل از مساحت بدست آوریم

طول $= x$ ، عرض $= y$ $\Rightarrow \cancel{S} = x \times y \Rightarrow x = \frac{25}{y}$ (۱)  محیط $P = 2(x+y) \overset{(1)}{=} 2\left(\frac{25}{y} + y\right)$

$$= 2\left(\frac{25+y^2}{y}\right) \Rightarrow \boxed{P(y) = \frac{50+2y^2}{y}}$$

نکته: برای تعیین دامنهٔ تابع $f$ از روی نمودار آن کافی است، تصویر نمودار را روی محور $x$ها مشخص کنید و برای تعیین برد تابع $f$ از روی نمودار آن کافی است تصویر نمودار را روی محور عرض‌ها یا $y$ها تعیین کنیم

تعریف ریاضی تابع و تشخیص تابع بودن از روی معادله جبری:

یک معادلهٔ جبری شامل دو متغیر $x$ و $y$ به شرط آنکه $y$ تابعی از $x$ باشد هنگامی تابع می‌باشد که از رابطهٔ $x_1 = x_2$ بتوان به رابطهٔ $y_1 = y_2$ رسید به عبارتی

اگر $\underbrace{(x_1, y_1) , (x_2, y_2) \in f \quad , \quad x_1 = x_2}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{y_1 = y_2}_{\text{حکم}}$

نکته: برای نشان دادن تابع نبودن یک رابطه می‌توان مثال نقض زد.

* یعنی به $x$ عددی نسبت دهیم که در نتیجه آن برای $y$ بیش از یک مقدار بدست آید.

مثال: نشان دهید کدام یک از معادلات زیر تابعی برحسب $x$ می‌باشد.

الف) $y = 3x^2 + 1$

حل) $(x_1, y_1) , (x_2, y_2) \in f \quad , \quad x_1 = x_2 \xrightarrow[\text{به توان ۲ می‌رسانیم}]{\text{دو طرف را}} x_1^2 = x_2^2 \xrightarrow[\text{را در ۳ ضرب می‌کنیم}]{\text{دو طرف}}$

تابع است

$3x_1^2 = 3x_2^2 \xrightarrow[\text{اضافه می‌کنیم}]{\text{به دو طرف ۱+}} 3x_1^2 + 1 = 3x_2^2 + 1 \Rightarrow y_1 = y_2$ ✓

تابع نیست ×

| $x$ | $3$ | $3$ |
|---|---|---|
| $y$ | $1$ | $-1$ |

ب) $|y| = x - 2$ (۱) مثال نقض (۲) دو راه حل

(۲) $(x_1, y_1) , (x_2, y_2) \in f \quad , \quad x_1 = x_2 \xrightarrow[\text{را کم می‌کنیم}]{\text{از دو طرف ۲}} x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow$

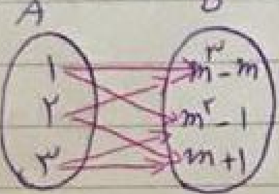
$|y_1| = |y_2| \xrightarrow[\text{قدر مطلق}]{\text{طبق تعریف}} y_1 = \pm y_2$ ×



نورخواه

# نمونه تستی سوالات بخش ۱ و ۲ تابع

۱- به ازای چند مقدار $m$، نمودار پیکانی روبرو یک تابع است؟




۱) هیچ ۲) یک ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲- کدام یک از … زیر یک تابع نیست؟

۱) $y^2+x^2+2x+1=0$ ۲) $y^2+x^2+1=0$

۳) $y^3-x^3+1=0$ ۴) $y^3-x^3+2x-1=0$

۳- بررسی کنید در کدام یک از معادلات زیر، $y$ تابعی از $x$ نیست؟

۱) $y^5=x^7+1$ ۲) $x^2+2y^2+2=2x-4y$

۳) $|y^2-1|+(x+1)^2=0$ ۴) $y+\sqrt[3]{x^2+1}=5$

۴- اگر دامنه تابع $f(x)=\frac{x^2-x}{2x^2+ax+b}$ به صورت $D_f=\mathbb{R}-\{1,2\}$ باشد $b-a$ کدام است؟

۱) $-2$ ۲) $2$ ۳) $6$ ۴) $10$

۵- اگر $f(x)=\sqrt{x+2|x|}$ مقدار $f(f(f(-144)))$ کدام است؟ (سراسری خارج ۸۸)

۱) تعریف نشده ۲) $6$ ۳) $8$ ۴) $12$

۶- اگر $f\left(\frac{2x-7}{2x+9}\right)=8x-3$ باشد، آنگاه $f(-1)$ کدام است؟ (سراسری ۸۸)

۱) $7$ ۲) $-9$ ۳) $-11$ ۴) $-7$

۷- در تابع با ضابطه $f(x)=x^2(2-x)^2$ حاصل $f(1+x)-f(1-x)$ کدام است؟ (سراسری ۸۵)

۱) صفر ۲) $4x$ ۳) $2x^2$ ۴) $4x^2$

۸- اگر $f(x-2)=x^2-4x+5$ باشد، آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) $1+x^2$ ۲) $x^2+3$ ۳) $x^2+4x+5$ ۴) $x^2-4x+5$

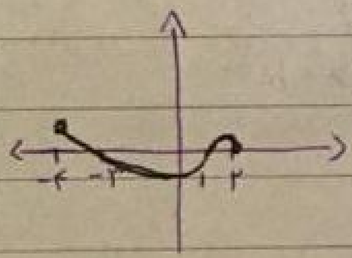
۹- اگر $f(x)=2-|x-2|$ باشد ضابطه تابع $f(f(x))$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج ۹۰)

۱) $x$ ۲) $4-x$ ۳) $f(x)$ ۴) $2-f(x)$

۱۰- اگر $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ باشد آنگاه دامنه تابع $f(3-x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

۱) $[0,2]$ ۲) $[0,3]$ ۳) $[1,2]$ ۴) $[1,3]$

۱۱- شکل مقابل، نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟
(سراسری ریاضی ۹۲)




۱) $[0,2]$ ۲) $[-3,2]$

۳) $[-4,-3]\cup[1,2]$ ۴) $[-3,0]\cup[1,2]$

۱۲- برد توابع زیر را بدست آورید:

1) $f(x)=\dfrac{3x^4-1}{x^4+1}$

2) $f(x)=2x^2-3x+1$

3) $g(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$

4) $f(x)=\dfrac{x^4+16}{x^2}$

جواب ۱- باید عضوهای مجموعه B یکی باشند تا تابع باشد پس سه عضو B را باهم مساوی می‌گیریم بهتر است دوتا از آنها را ابتدا باهم مساوی بگیریم وجواب آن را درسومی امتحان کنیم. گزینه ۲

$m^2-1=m+1 \Rightarrow m^2-m-2=0$

$(m-2)(m+1)=0 \quad m-2=0 \quad m=2$ غ ق ق $\quad m=-1$ ق ق

۱) در معادله $m^3-m=0$ نیز صدق می‌کند چون

$m=-1 \Rightarrow (-1)^3-(-1)=-1+1=0$

ولی $m=2$ در معادله صدق نمی‌کند. جواب گزینه ۲

نکته مهم ۱: بخاطر معادله $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ معادله یک دایره به مرکز $(x_0, y_0)$ و به شعاع $R$ می‌باشد. در کل هرجا معادله دایره با شعاع $R>0$ باشد آن معادله از $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ تابع نمی‌باشد. ولی اگر در معادله دایره $R=0$ شود آن معادله فقط شامل یک نقطه می‌شود و هر مجموعه تک عضوی و یا تهی همیشه تابع هستند.

جواب ۲) گزینه ۲

با توجه به نکته بالا در گزینه اول داریم

$y^2+\underbrace{x^2+2x+1}_{(x+1)^2}=0 \Rightarrow y^2+(x+1)^2=0$

دو طریق می‌توانیم بررسی کنیم.

روش اول: چون $y^2$ و $(x+1)^2$ هر دو مثبت هستند و جمعشان صفر شده است پس هر یک باید صفر باشند. تابع است $\{(-1, 0)\} \Leftarrow \{x=-1 \quad x+1=0 \quad y=0$

روش دوم: $(x+1)^2+y^2=0$ یک دایره به مرکز $(-1, 0)$ است که شعاع آن هم صفر است پس یک نقطه می‌شود $\{(-1, 0)\}$ پس تابع می‌باشد

در گزینه دوم داریم: $x^2+y^2=1$ پس دایره‌ای به مرکز (۰و۰) و شعاع ۱ می‌باشد پس تابع نیست

در گزینه ۳ و ۴ چون درجه سوم هستند به ازای هر x یک مقدار برای y حاصل می‌شود پس تابع می‌باشند

$y^3-x^3+1=0 \Rightarrow y^3=x^3-1 \Rightarrow y=\sqrt[3]{x^3-1}$ تابع است ✓

$y^3-x^3+2x-1=0 \Rightarrow y^3=x^3-2x+1 \Rightarrow y=\sqrt[3]{x^3-2x+1}$ تابع است.

۳- گزینه ۳ در گزینه ۱ و ۴ چون توان y فرد است پس به ازای هر x یک مقدار برای y حاصل می‌شود پس تابع می‌باشند.

اثبات تابع بودن ۴) $x_1=x_2 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1^2+1=x_2^2+1 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1^2+1}=\sqrt[3]{x_2^2+1}$

$\Rightarrow -\sqrt[3]{x_1^2+1}=-\sqrt[3]{x_2^2+1} \Rightarrow 5-\sqrt[3]{x_1^2+1}=5-\sqrt[3]{x_2^2+1} \Rightarrow y_1=y_2$

اثبات تابع بودن ۱) $x_1=x_2 \Rightarrow x_1^7=x_2^7 \Rightarrow x_1^7+1=x_2^7+1 \Rightarrow y_1^5=y_2^5$

$\Rightarrow y_1=y_2$

اثبات تابع بودن ۲)

$x^2+4y^2+\overbrace{2}^{1+1}-2x+4y=0$

$(x^2+1-2x)+(4y^2+4y+1)=0 \Rightarrow (x-1)^2+(2y+1)^2=0$

$x-1=0$ $x=1$ $2y+1=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

پس طبق نکته مهم ① در صفحه اول این رابطه فقط شامل یک زوج مرتب $(1, -\frac{1}{2})$ است که تابع می‌باشد

اثبات تابع نبودن ۳) مجموع دو عبارت نامنفی صفر شده است پس هر یک از آنها صفر هستند

$(x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$ $|y^2-1|=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$

بنابراین دو زوج مرتب (۱+ و ۱-) و (۱- و ۱-) تشکیل می‌شود که تابع نیست

۴- گزینه ۴

چون ۱=x و ۲=x ریشه‌های مخرج کسر هستند بنابراین: $2x^2+ax+b=0$

$x=1 \Rightarrow 2+a+b=0 \Rightarrow \boxed{a+b=-2}$

$2x^2+ax+b=0 \xrightarrow{x=2} \boxed{2a+b=-8}$

$\Rightarrow \begin{cases} -a-b=+2 \\ 2a+b=-8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-6},\ \boxed{b=4}$

$b-a=4-(-6)=\boxed{10}$

۵- گزینه ۲

$f(x)=\sqrt{x+2|x|} \Rightarrow f(-144)=\sqrt{-144+2\times144}=\sqrt{144}=12$

$f(f(-144))=f(12)=\sqrt{12+2\times12}=\sqrt{36}=6$

۶- گزینه ۴ دو روش

۱) روش تغییر متغیر

$\frac{2x-7}{2x+9}=\frac{t}{1} \Rightarrow 2xt+9t=2x-7$

$2xt-2x=-7-9t$

$x(2t-2)=-7-9t \Rightarrow \boxed{x=\frac{-7-9t}{2t-2}}$

$\Rightarrow f^{-1}(t)=8\left(\frac{-7-9t}{2t-2}\right)-3 \Rightarrow \boxed{f^{-1}(-1)=-7}$

۲- روش دوم

$\frac{2x-7}{2x+9}=-1 \Rightarrow 2x-7=-2x-9 \Rightarrow 4x=-2 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{2}} \Rightarrow f(-1)=8\left(-\frac{1}{2}\right)-3=-7$

۷- گزینه ۱

$f(x)=x^2(2-x)^2=(x(2-x))^2$

$f(1+x)=((1+x)(1-x))^2=(1-x^2)^2$

$f(1-x)=((1-x)(1+x))^2=(1-x^2)^2$

$\Rightarrow f(1+x)-f(1-x)=(1-x^2)^2-(1-x^2)^2$

۸- گزینه ۴

$x-3=t \Rightarrow x=t+3 \Rightarrow f(t)=(t+3)^2-4(t+3)+5$

$f(t)=t^2+9+6t-4t-12+5 \Rightarrow f(t)=t^2+2t+2 \Rightarrow f(x)=t^2+2t+2$

$f(1-x)=(1-x)^2+2(1-x)+2=1+x^2-2x+2-2x+2=\boxed{x^2-4x+5}$

نکاتی درمورد برد: مهم مهم

برای بدست آوردن برد تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ دو راه وجود دارد

**۱**- می‌توان با در نظر گرفتن مختصات راس سهمی ($x_0=\frac{-b}{2a}$ و $y_0=\frac{-\Delta}{4a}$) مقدار $y_0$ را تعیین و با توجه به علامت $a$ و max و min سهمی محدوده برد را مشخص کرد

**۲**- ابتدا تابع را به صورت $ax^2+bx+c-y=0$ بنویسیم و سپس شرط $\Delta \geq 0$ را اعمال کنیم تا برد بدست آید، زیرا در این معادله درصورتی برای $x$ جواب بدست می‌آید که $\Delta \geq 0$ باشد.

راه اول:

۱۲) ۲ سهمی رو به بالا و min دارد $y_0=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-1}{8} \Rightarrow R_f=[\frac{-1}{8},+\infty)$

راه دوم: $y=2x^2-3x+1 \Rightarrow 2x^2-3x+1-y=0 \quad \Delta \geq 0$

$\Rightarrow (-3)^2-4(2)(1-y)\geq 0 \Rightarrow 9-8+8y\geq 0 \Rightarrow 8y+1\geq 0 \Rightarrow 8y\geq -1$

$\Rightarrow \underline{y\geq \frac{-1}{8}} \Rightarrow R_f=[-\frac{1}{8},+\infty)$

۳- $y=\frac{x}{x^2+4} \Rightarrow yx^2+4y=x \Rightarrow yx^2+4y-x=0 \;,\; \Delta\geq 0 \Rightarrow$

$a=y \quad b=-1 \quad c=4y$

$\Delta=1-4(y)(4y)=1-16y^2\geq 0 \Rightarrow 16y^2\leq 1 \Rightarrow y^2\leq\frac{1}{16} \Rightarrow -\frac{1}{4}<y<\frac{1}{4}$

(با جدول تعیین علامت هم می‌توان بدست آورد)

$\Rightarrow R_g=[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$

نکته دوم برای بدست آوردن برد تابع:

گاهی اوقات برای محاسبه برد توابع می توان از نامساوی های زیر استفاده کرد.

الف) برای هر دو عدد حقیقی مثبت $a$ و $b$ داریم: $\Longleftarrow$ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

ب) برای هر دو عدد حقیقی منفی $a$ و $b$ $\Longleftarrow$ $a+b \leq -2\sqrt{ab}$

۴)

$$f(x) = \frac{x^4+16}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} + \frac{16}{x^2} = x^2 + \frac{16}{x^2}$$

$$y = x^2 + \frac{16}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{16}{x^2}} = 8 \Rightarrow f(x) \geq 8 \Rightarrow R_f = [8, +\infty)$$

## انواع تابع:

۱) تابع چندجمله‌ای: توابعی که ضابطه آنها چندجمله‌ای های جبری به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ از یک متغیر باشد توابع چندجمله‌ای می‌گوییم که در آنها دامنه برابر $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) می‌باشد.

مثال: نمودار تابع چندجمله‌ای درجه دوم $f$، محور $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. اگر $f(1)=2$ و $f(-1)=-4$ باشد، $f(2)$ را بدست آورید.

پاسخ: شکل کلی معادله درجه دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد چون

$$f(0) = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1} \Rightarrow y = ax^2 + bx + 1$$

طبق فرض $f(1) = 2 \Rightarrow a + b + 1 = 2$

$$f(-1) = -4 \Rightarrow a - b + 1 = -4 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = -5 \end{cases}$$

$$2a = -4 \quad \boxed{a = -2}$$

$$\Rightarrow -2 + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 3} \Rightarrow -2x^2 + 3x + 1 = y = f(x)$$

$$\Rightarrow f(2) = -2(2)^2 + 3(2) + 1 = \boxed{-1}$$

نکته: در توابع چندجمله‌ای متغیر تابع نمی‌تواند داخل رادیکال یا داخل قدرمطلق قرار داشته باشد و متغیر نمی‌تواند توان منفی داشته باشد یا در مخرج کسر قرار بگیرد. دقت کنید توابعی مانند توابع زیر چندجمله‌ای نیستند.

$$f(x) = |x| \quad , \quad f(x) = \sqrt{x-1} \quad , \quad f(x) = x^{-3} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x+2}$$

**۲-۵ تابع خطی:** تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌گوییم. تابع خطی یک تابع دو جمله‌ای از درجهٔ اول است که اگر دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن یک خط راست می‌باشد.

**مثال:** در تابع خطی $f$ رابطهٔ $2f(x+1)-f(2x+1)=2$ برقرار است. اگر $f(2)=1$ باشد، $f(-2)$ را بدست آورید؟

جواب: چون $f$ تابع خطی است پس ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=ax+b$ می‌باشد پس داریم: $2f(x+1)-f(2x+1)=2 \Rightarrow$

$$2(a(x+1)+b)-(a(2x+1)+b)=2 \Rightarrow$$
$$2(ax+a+b)-(2ax+a+b)=2 \Rightarrow \cancel{2ax}+2a+2b-\cancel{2ax}-a-b=$$
$$a+b=2 \quad (1) \qquad \text{و داریم } f(x)=ax+b \xrightarrow{f(2)=1} 2a+b=1 \quad (2)$$
$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a-\cancel{b}=-2 \\ 2a+\cancel{b}=1 \end{cases} \Longrightarrow a=-1 \quad b=3 \Rightarrow -x+3=$$
$$f(-2)=-(-2)+3=5$$

**مثال)** اگر برد تابع خطی $f(x)=-5x+2$ بازهٔ $[-8,7]$ باشد، دامنهٔ این تابع کدام است؟

۱) $[-2,1]$ ۲) $[-1,2]$ ✓ ۳) $[-1,1]$ ۴) $[-2,2]$

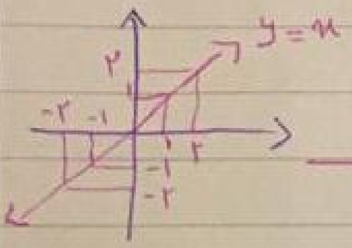
پاسخ

$$R_f=[-8,7] \Rightarrow -8\leq f(x)\leq 7$$
$$\Rightarrow -8\leq -5x+2\leq 7 \overset{-2}{\Rightarrow} -8-2\leq -5x+\cancel{2}-\cancel{2}\leq 7-2 \Rightarrow \frac{-10}{-5}\leq \frac{-5x}{-5}\leq\frac{5}{-5}$$

به طرفین اضافه

$$-1\leq x\leq 2 \quad \text{« علامت برعکس می‌شود چون بر منفی تقسیم می‌شود »} \Rightarrow D_f=[-1,2]$$

۳- تابع همانی: هرگاه هر عضو از دامنهٔ تابع دقیقاً به همان عضو در برد تابع نظیر شود، تابع همانی نام دارد یعنی $f(x) = x$ به عبارتی $y = x$ که اگر دامنه این تابع $\mathbb{R}$ باشد پس نمودار آن نیمساز ناحیه اول و سوم می‌باشد.




$f(x) = y$

مثال: اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{ax^2 + 3x + c}{x + b}$ یک تابع همانی باشد $\frac{b-c}{a}$ کدام است؟

۱) ۳ ✓　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) صفر

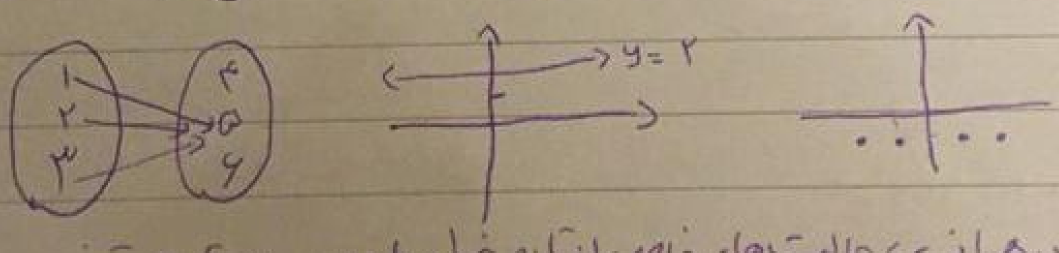
پاسخ: در تابع همانی $f(x) = x$ ⇐

$$\frac{ax^2 + 3x + c}{x + b} = \frac{x}{1}$$

$$ax^2 + 3x + c = 1x^2 + bx \Rightarrow \begin{cases} ax^2 = 1x^2 \Rightarrow a = 1 \\ 3x = bx \Rightarrow b = 3 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b-c}{a} = \frac{3-0}{1} = \boxed{3}$$

۴- تابع ثابت: تابعی که به ازای همهٔ xها فقط یک مقدار برای y داشته باشیم تابع ثابت است یعنی برد تابع فقط شامل یک عضو است به عبارتی $f(x) = c$ که در آن c عدد حقیقی است، مثال: توابع زیر هر یک نمونه‌ای از تابع ثابت است.




نکته: توابع ثابت و همانی، حالت‌های خاصی از تابع خطی $f(x) = ax + b$ هستند. (اگر $b = 0$ و $a = 1$، تابع همانی و اگر $a = 0$ تابع ثابت است.)

۹- گزینه ۳

$f(f(x)) = f(2-|x-2|) = 2-|(\cancel{2}-|x-2|)-\cancel{2}|$

$= 2-\big|-|x-2|\big| = 2-|x-2| = f(x)$

---

۱۰-

$f(x)=\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow f(3-x)=\sqrt{2(3-x)-(3-x)^2}$

$2(3-x)-(3-x)^2 \geq 0 \Rightarrow (3-x)\big(2-(3-x)\big) \geq 0 \Rightarrow (3-x)(x-1) \geq 0$

$3-x=0 \quad x=3$ $\qquad x-1=0 \quad x=1$

| | $-\infty$ | 1 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3-x$ | + | | + | 0 | − |
| $x-1$ | − | 0 | + | | + |
| کل | − | 0 | + | 0 | − |

$\underbrace{\qquad}_{\text{ج.}}$

$\Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_{f(3-x)} = [1,3]$

---

۱۱-

چون $xf(x)$ زیر رادیکال با فرجهٔ زوج است پس داریم:

$xf(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \text{ و } f(x) \geq 0 \\ \text{یا} \\ x \leq 0 \text{ و } f(x) \leq 0 \end{cases}$

با شرط $x \geq 0$ و با توجه به نمودار تابع $f$ در بازهٔ $[1,2]$ نامنفی است $(f(x) \geq 0) \Leftarrow$

$x \geq 0 , f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [1,2]$ (1)

با شرط $x \leq 0$ با توجه به شکل $f$ در بازهٔ $[-3,0]$ نامثبت است $f(x) \leq 0 \Leftarrow$

$x \leq 0 , f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [-3,0]$ (2) $\qquad$ (1) و (2) $\Rightarrow D_f = [-3,0] \cup [1,2]$

---

۱۲) ۱)

$\frac{y}{1} = \frac{3x^4-1}{x^4+1} \Rightarrow yx^4+y = 3x^4-1 \Rightarrow y+1 = 3x^4-yx^4$

$\Rightarrow y+1 = x^4(3-y) \Rightarrow x^4 = \frac{y+1}{3-y} \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{y+1}{3-y}} \geq 0$

$y+1=0 \quad y=-1$ $\qquad 3-y=0 \quad y=3$

| $y$ | $-\infty$ | −1 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y+1$ | − | 0 | + | | + |
| $3-y$ | + | | + | 0 | − |
| $\frac{y+1}{3-y}$ | − | 0 | + | تعریف نشده | − |

$\underbrace{\qquad}_{\text{ج.}}$

$R_f = [-1,3)$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<2\\ x^2 & x\geq 2\end{cases}$ باشد مقادیر $f(1)$ و $f(\sqrt{5})$ و $f(0)$ و $f(2)$ را بدست آورید.

پاسخ:

$f(0)=2(0)-1=-1 \qquad f(1)=2(1)-1=1$

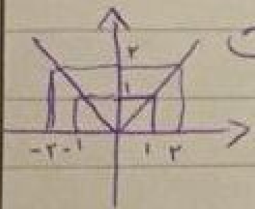
$f(2)=2^2=4 \qquad f(\sqrt{5})=(\sqrt{5})^2=5$

۶) تابع قدر مطلق:

تابع قدر مطلق به صورت $f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$ تعریف می‌شود. یعنی مقدار تابع به ازای اعداد بزرگتر یا مساوی صفر برابر خود آن عدد و به ازای اعداد کوچکتر از صفر برابر قرینهٔ آن عدد در نتیجه نمودار تابع $f(x)=|x|$ به صورت زیر است

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 0 | 0 |

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| -1 | 1 |
| -2 | 2 |



مثال: اگر $f(x)=|x|-x$ باشد، تابع با ضابطهٔ $y=f(f(x))$ کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) صفر ۴) $|x|$

پاسخ: $f(f(x))$ یعنی در تابع $f(x)$ به جای $x$هایش خود تابع $f(x)$ یعنی $|x|-x$ را قرار دهیم. توجه کنید $|x|\geq x \Leftarrow |x|-x$ همیشه مقداری مثبت است پس $||x|-x|=|x|-x$ پس داریم:

$$y=f(f(x))=f(|x|-x)=\underbrace{||x|-x|}_{|x|-x}-(|x|-x)=0$$

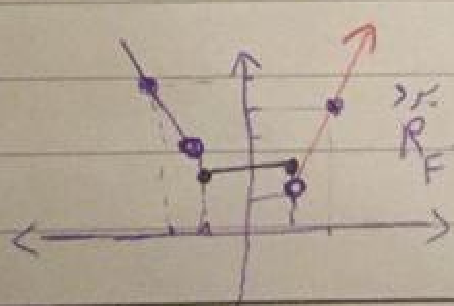
مثال: نمودار زیر را رسم کرده و برد آن را مشخص کنید:

$$f(x)=\begin{cases}1-2x & x<-1\\ 2 & -1\leq x\leq 1\\ 3x-2 & x>1\end{cases}$$

| $x$ | $y=1-2x$ |
|---|---|
| -1 | 3 |
| -2 | 5 |

| $x$ | $y=2$ |
|---|---|
| -1 | 2 |
| 1 | 2 |

| $x$ | $y=3x-2$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |



برد
$R_f=(1,+\infty)$

مثال: اگر $f=\{(-1, a^2-6), (2, b+1), (3, a)\}$ یک تابع ثابت باشد $|a+b|$ کدام است؟

۱) ۲     ۲) ۳     ۳) ۴     ۴) ۵ ✓

پاسخ: چون تابع ثابت است پس تمام y های از زوج مرتب ها باید با هم برابر باشند.

$$a^2-6=a \Rightarrow \underbrace{a^2-a-6=0}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} \Rightarrow (a-3)(a+2)=0$$

$$a=3 \quad a=-2 \quad , \quad b+1=a \Rightarrow b=a-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \Rightarrow b=2 \Rightarrow a+b=5 \\ a=-2 \Rightarrow b=-3 \Rightarrow a+b=-5 \end{cases} \Rightarrow |a+b|=5$$

۵) تابع چندضابطه‌ای: تابعی که به ازای xهای مختلف، ضابطه‌های متفاوتی داشته باشیم، یک تابع چندضابطه‌ای می‌گوییم (مانند تابع قدرمطلق). دامنه‌ی این توابع اجتماع تک تک محدوده‌ی xهای باشد و برای رسم نیز باید نمودار هر یک از ضابطه‌ها را جداگانه رسم کنیم و از روی شکل نمودار رسم شده می‌توان برد آن را تعیین کرد.

نکته مهم: شرط آنکه یک معادله‌ی چندضابطه‌ای، ضابطه‌ی یک تابع باشد آن است که هر یک از ضابطه‌های آن تابع بوده و اشتراک دامنه‌های هر دو ضابطه‌ی دلخواه آن تهی باشد یا اگر عضو مشترکی در دامنه‌ها باشد، مقدار تابع در ضابطه‌ها به ازای آن عضو برابر شود.

مثال: a را چنان بیابید که رابطه‌ی زیر در $\mathbb{R}$ یک تابع باشد.

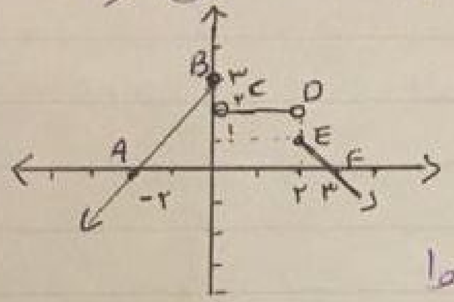
$$f(x)=\begin{cases} ax+2 & x\geq 2 \\ x^2 & x\leq 2 \end{cases}$$

پاسخ: $x=2$ در هر دو مشترک است پس باید yها هم با هم در این نقطه $x=2$ یکسان باشند.

$$\begin{cases} x=2 \\ ax+2=x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2-ax-2=0 \Rightarrow 2^2-2a-2=0 \Rightarrow 4-2a-2=0$$

$$a=\frac{2}{2}=1$$

مثال) ضابطهٔ تابع شکل مقابل را بنویسید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.




پاسخ: از شکل داده شده متوجه می‌شویم دو نقطه از هر قطعه از شکل را داریم => بوسیله دو نقطه ابتدا شیب خط را بدست آورده و سپس معادله خط مربوط به آن را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} B(0,3) \\ A(-2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-0}{0-(-2)} = \frac{3}{2} = 1/5$$

معادله خط AB

معادله خط $y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = \frac{3}{2}(x-(-2)) \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}x + 3}$ ①

$$\left.\begin{array}{l} C(0,2) \\ D(2,2) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{دریچه}} m_{CD} = \frac{2-2}{0-2} = \frac{0}{-2} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 2}$$ معادله خط CD ②

③ معادله خط EF

$$\left.\begin{array}{l} E(2,1) \\ F(3,0) \end{array}\right\} \Rightarrow m_{EF} = \frac{1-0}{2-3} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow y - 0 = -1(x-3) \Rightarrow \boxed{y = -x+3}$$

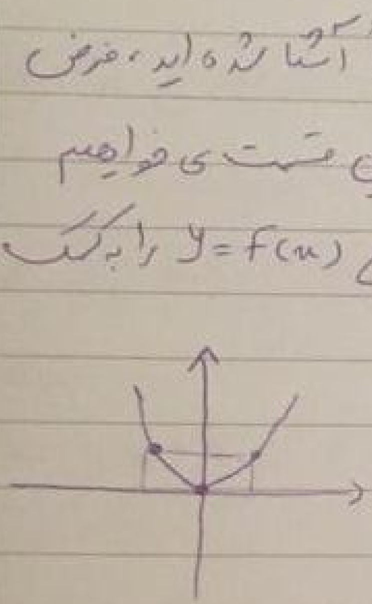
$$①, ②, ③ \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 3 & x \leq 0 \\ 2 & 0 < x < 2 \\ -x + 3 & x \geq 2 \end{cases}$$

دامنه $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

برد $R_f = (-\infty, 3]$

## نکات تکمیلی برای انتقال نمودارها:

با رسم توابع درجه اول و درجه دوم در قسمت‌های قبل کاملاً آشنا شده‌اید، فرض کنیم نمودار تابع $y = f(x)$ را داشته باشیم، در این قسمت می‌خواهیم به کمک روش‌های زیر، نمودار توابع دیگری از تابع $y = f(x)$ را به کمک نمودار $y = f(x)$ رسم کنیم:



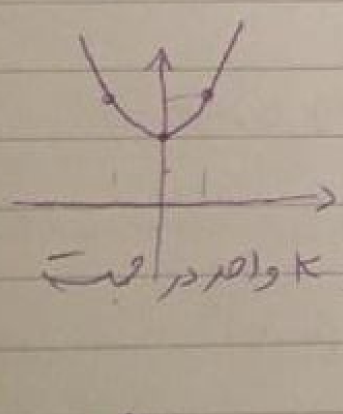
*مثال: فرض کنیم $y = f(x) = x^2$ باشد داریم:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $1$ | $0$ | $1$ |

راس

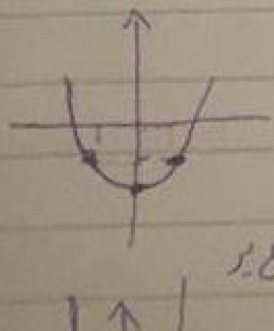
تغییرات نمودار در راستای محور $y$ها

۱) برای رسم نمودار $y = f(x)+k$ کافی است نمودار را $k$ واحد در جهت مثبت محور $y$ها به سمت بالا انتقال دهیم: (فرض $k>0$)



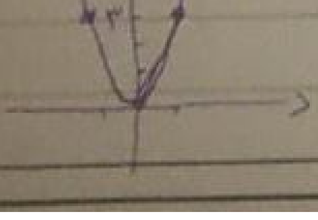
مثال* نمودار $y = x^2+2$

۲- برای رسم نمودار $y = f(x) - k$ کافی است نمودار را $k$ واحد در جهت منفی محور $y$ها به سمت پایین منتقل کنیم.



مثال: نمودار $y = x^2-2$

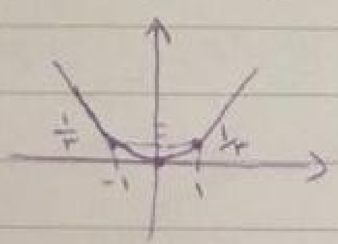
۳- برای رسم نمودار $y = k f(x)$ کافی است عرض همه نقاط واقع بر نمودار $y = f(x)$ را $k$ برابر کنیم.



مثال: نمودار $y = 3x^2$

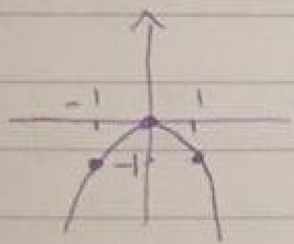
۴- برای رسم نمودار $y=\frac{1}{k}f(x)$ کافی است عرض همه نقاط تابع بر k تقسیم شود

مثال: نمودار تابع $y=\frac{1}{3}x^2$ :



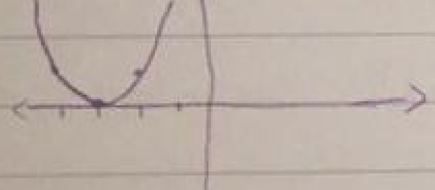
۵- برای رسم نمودار $y=-f(x)$ کافی است نمودار را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

مثال: نمودار $y=-x^2$ را رسم کنید.



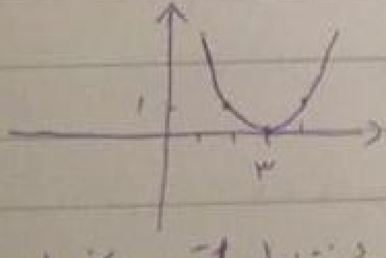
۶- برای رسم نمودار $y=f(x+k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را به اندازه k واحد در جهت منفی محور xها «به سمت چپ» منتقل کنیم.

مثال: نمودار $y=(x+3)^2$ را رسم کنید.



۷- برای رسم نمودار $y=f(x-k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را به اندازه k واحد در جهت مثبت محور xها «به سمت راست» منتقل کنیم.

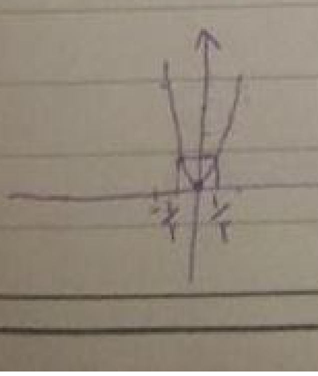
مثال: نمودار $y=(x-3)^2$ را رسم کنید.



۸- برای رسم نمودار $y=f(kx)$ کافی است طول همه نقاط واقع بر نمودار $f(x)$ را بر k تقسیم کنیم.

مثال: نمودار $y=(3x)^2$ «طول همه نقاط را نصف می‌کنیم»

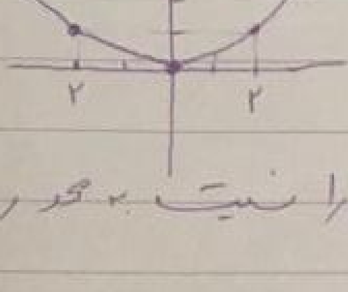
| | | |
|---|---|---|
| $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| 1 | 0 | 1 |



۹- برای رسم نمودار $y=f(\frac{x}{k})$ کافی است طول همهٔ نقاط واقع بر نمودار را در k ضرب کنیم.

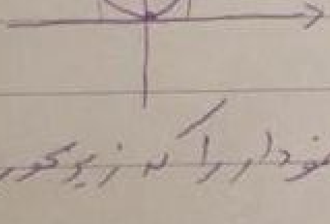
مثال: نمودار $y=(\frac{x}{2})^2$ را رسم کنید.

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | -2 | 0 | 2 |
| y | 1 | 0 | 1 |



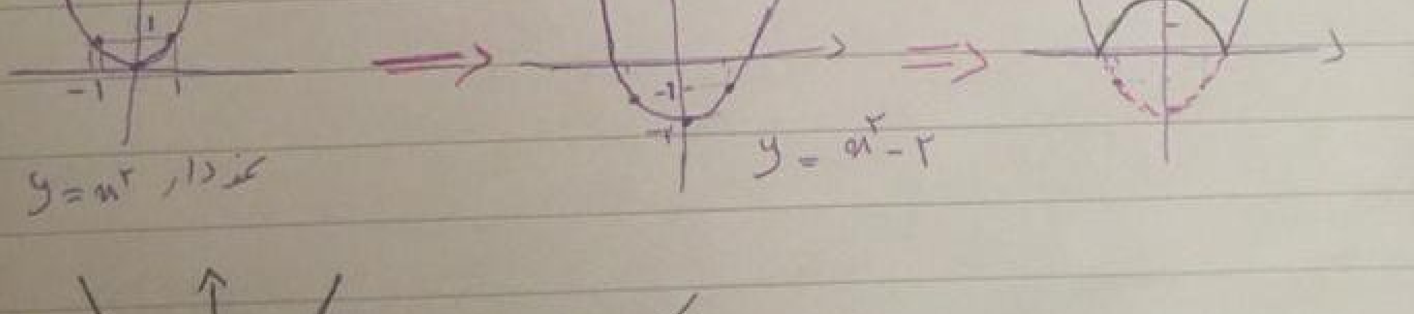
۱۰- برای رسم نمودار $y=f(-x)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

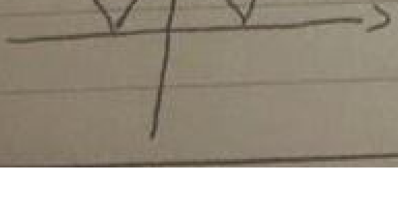
مثال: نمودار $y=(-x)^2$ را رسم کنید: چون $y=(-x)^2=x^2$ است پس نمودار در واقع تغییری نمی‌کند چون محور yها برای این تابع محور تقارن است



۱۱- برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است که قسمتی از نمودار را که زیر محور xها باشد نسبت به محور xها قرینه کرده و به بالای محور x بیاوریم.

مثال: نمودار تابع $y=|x^2-2|$ را رسم کنید.



شکل نهایی

تعریف ۱۱) تابع یک به یک. تابعی یک به یک می باشد که در آن هیچ دو زوج مرتبی دارای مولفهٔ دوم یکسان نباشند یا اگر مولفهٔ دوم یکسان داشته باشند آنگاه مولفهٔ اول آنها نیز یکسان باشد.

به عبارتی: اگر $x_1, x_2 \in D_f$ و $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ $\quad y = 2x^3 - 4$

مثال) آیا تابع $y = x^2 + 5$ یک به یک است؟

یک به یک نیست. ✗ $\quad f(x_1) = f(x_2) \quad x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$ مبنی بر تعریف ریاضی

تعریف ۱۲) تشخیص یک به یک بودن تابع از روی نمودار: منحنی یا نمودار تابعی یک به یک می باشد که هر خط موازی محور $x$ها حداکثر آن را در یک نقطه قطع کند.

۱۲) عملیات ریاضی

اعمال روی توابع جبری

تابع $f$ با دامنهٔ $D_f$ و تابع $g$ با دامنهٔ $D_g$ را در نظر بگیرید برای هر $x$ متعلق به اشتراک دامنه‌های $f$ و $g$ داریم:

$$\left.\begin{aligned} (f+g)x &= f(x) + g(x) \\ (f-g)x &= f(x) - g(x) \\ (f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow D_{f\pm g} = D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$$

$$(\alpha f)x = \alpha f(x) \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad D_{\alpha f} = D_f$$

مثال) اگر توابع $f$ و $g$ به صورت $f = \{(2,5), (3,-1), (5,9)\}$ و $g = \{(2,7), (0,1), (4,-2), (\frac{1}{2}, 1)\}$ تعریف شده باشد آنگاه، تابع $f\cdot g$ را بدست آورید.

$D_f = \{2, 4, 5\}$

$D_g = \{0, \frac{1}{2}, 2, 4\} \Rightarrow D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g = \{2\} \qquad (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = f(2)\cdot g(2)$

$= 5 \times 7 = 35$

$f\cdot g = \{(2, 35)\}$

۱۳_ تعریف ۱۳) ترکیب توابع

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) \qquad D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) \qquad D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

اگر عدد صحیحی مانند n وجود داشته باشد بطوریکه $n \le x < n+1$ آنگاه $[x] = n$

به عبارت دیگر جزء صحیح x بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است.

$[0.2] = 0$ $[1.2] = 1$ $[-2] = -2$

$[-1.2] = -2$ $[2] = 2$

تابع جزء صحیح تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{Z}$ است به صورت $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \to [x]$

نکته $[x + n] = [x] + n$

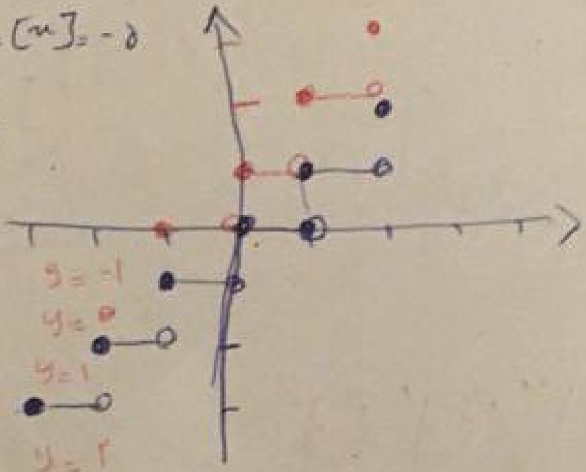
در بازه $[-5, 4]$

$f(x) = [x]$

$f(x) = [x]_{-5}$

$f(x) = [x] + 1$

| | | |
|---|---|---|
| $-5 \le x < -4$ | ~~y~~ | |
| $-4 \le x < -3$ | $y = -4$ | |
| $-3 \le x < -2$ | $y = -3$ | |
| $-2 \le x < -1$ | $y = -2$ | $y = -1$ |
| $-1 \le x < 0$ | $y = -1$ | $y = 0$ |
| $0 \le x < 1$ | $y = 0$ | $y = 1$ |
| $1 \le x < 2$ | $y = 1$ | $y = 2$ |
| $x = 2$ | $y = 2$ | $y = 3$ |



مثل انتقال نمودار

ص ۱۳۶

تابع f را متناوب گویند در صورتیکه عدد ناصفر مانند T وجود داشته باشد به طوریکه

$f(x+T)=f(x)$ $\quad f(x+2T)=f(x+T)=f(x)$ در کل $f(x+nT)=f(x)$

مثال $y=\sin x$

| $x$ | $-2\pi$ | $-\frac{3\pi}{2}$ | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |

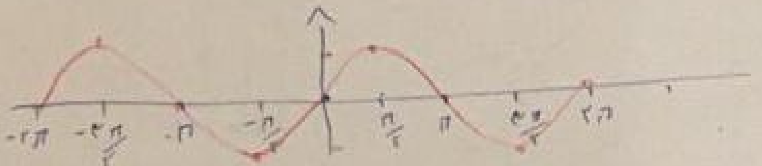
۱۰ سردار

$y=\cos x$

$y=(\cos x+\frac{\pi}{2})+1$

مثال $y=\frac{1}{2}\sin(x)-2$

$y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$



تمرین

$y=\cos x$

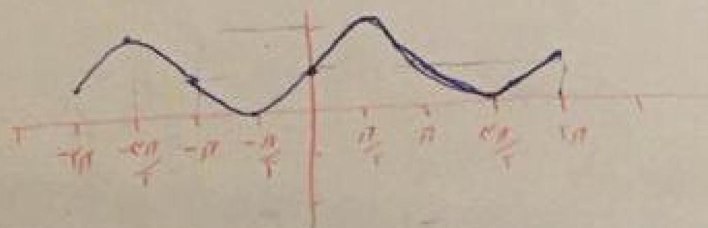
$y=\cos x+2$

$y=\cos(x+\frac{\pi}{4})$

به اندازه ۱ واحد بالا

$y=\sin x+1$

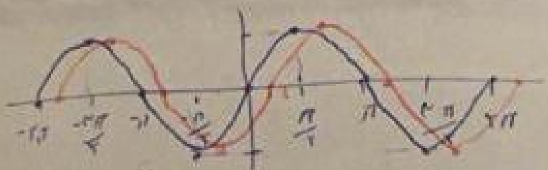
| $x$ | $-2\pi$ | $-\frac{3\pi}{2}$ | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $y+1$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 |



۱۰ و ۱۲ و ۱۵

به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به راست

$y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$



$y=\sin x+3$

$y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$y=\sin(x+\frac{\pi}{4})-3$

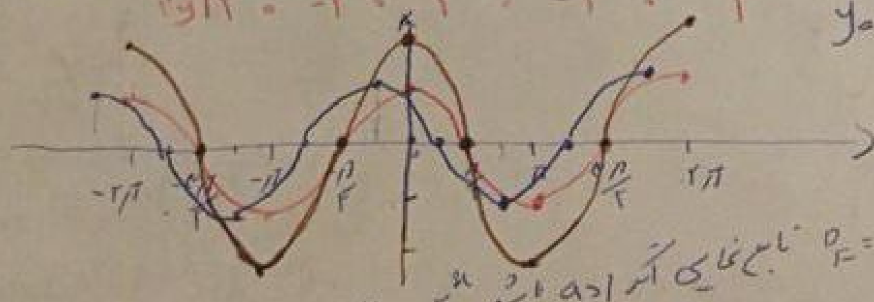
$y=\cos x$

به اندازه $\frac{\pi}{2}$ به چپ

$y=\cos(x+\frac{\pi}{2})$

| $x$ | $-2\pi$ | $-\frac{3\pi}{2}$ | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| $2y$ | 2 | 0 | -2 | 0 | 2 | 0 | -2 | 0 | 2 |

$y=\cos(x-\frac{\pi}{4})-\frac{3}{2}$

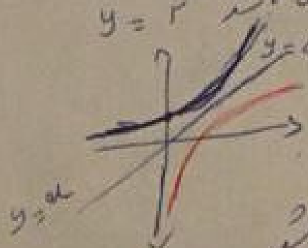


تابع نمایی

$y=2\cos x$

تابع $y=a^x$ که $D_f=\mathbb{R}$ تابع نمایی اگر $a>1$ باشد $y=2^x$

$0<a<1$



تمرین $y=2\cos(x+\frac{\pi}{2})$

$y=2\sin x$

$y=\cos x-3$

معکوس تابع $y=a^x$ تابع $y=\log_a^x$ می‌باشد

که قرینه $y=a^x$ نسبت به $y=x$ است یعنی

$x=a^y \iff \log_a^x=y$