اعداد مختلط

یک عدد مختلط به صورت زوج مرتب $(x\,,y)$ که در آن x و y اعدادی حقیقی می باشند تعریف می شود. واضح است که:

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1=x_2\,,y_1=y_2$$

اعمال جمع و ضرب دو عدد مختلط را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$
$$(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$$
$$m(x,y)=(mx,my)$$

این اعمال دارای خواص زیر هستند:

1 - خاصیت جابجایی نسبت به اعمال جمع و ضرب

2 - خاصیت شرکت پذیری نسبت به اعمال جمع و ضرب

3 - خاصیت پخشی عمل ضرب به عمل جمع

قرارداد:

$$(x,0)=x$$

با این قرار داد، اعداد حقیقی زیر مجموعه ای از اعدادمختلط می باشد. علاوه بر این اعمال جمع و ضرب تعریف شده برای اعداد مختلط در مورد اعداد حقیقی به جمع و ضرب معمولی تبدیل می شوند. بنابرین دستگاه اعداد مختلط گسترشی طبیعی از دستگاه اعداد حقیقی است.

نقاط $(0,0)$ و $(1,0)$ نیز که با اعداد 0 و 1 یکی هستند عضو خنثی مجوعه اعداد مختلط نسبت به اعمال جمع و ضرب می باشند.

یکه موهومی:

$$i=(0,1)$$

$$i^2=i.i=(0,1).(0,1)=-1$$

قوانین ضرب،تقسیم و توانهای اعدادمختلط نیز مانند قوانین مربوط به اعداد حقیقی اند.

قضیه اساسی جبر:

هر چند جمله ای به شکل $a_0+a_1x+...+a_nx^n=0$ که در آن

ضرایب اعدادی حقیقی هستند در دستگاه اعداد مختلط دارای n جواب است.

حتی اگر ضرایب اعدادی مختلط باشند، این معادله در دستگاه اعداد مختلط جواب دارد.

این قضیه نشان می دهد برای حل معادلات با ضرایب مختلط لزومی به ساختن مجموعه ای وسیع تر از مجموعه اعداد مختلط نیست.

هر عدد مختلط را می توان بصورت $z=x+iy$ نشان داد، زیرا

$$(x,y)=x(1,0)+y(0,1)=x+iy$$

مثال: اعداد زیر را به صورت زوج مرتب بنویسید؟

$$-2=-2(1,0)$$

$$i^2=(0,1)(0,1)=-1(1,0)=-1$$

$$i^3=(0,1)(0,1)(0,1)=-1(0,1)=-i$$

معادله $x^2+1=0$ در مجموعه اعداد حقیقی دارای ریشه نمی باشد، یعنی بر روی محور اعداد حقیقی نقطه ای را نمی توان یافت که در معادله فوق صدق کند. حال فرض کنید $i=\sqrt{-1}$ (هر چند در $\mathbb{R}$ بی معنی است) بنابراین $i^2=-1$ و معادله فوق دارای جواب $x^2=i^2$ خواهد بود.

مثال: معادله $x^2+7=0$ را در نظر بگیرید:

$$x^2=-7=i^2 7 \qquad\qquad x=\pm i\sqrt{7}$$

مثال: ریشه های معادله $x^2+4x+6=0$ را بیابید؟

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-6}}{1}=-2\pm\sqrt{-2}=-2\pm i\sqrt{2}$$

نکته: اگر $z=x+iy$ باشد، قسمت حقیقی z را با $\mathrm{Re}(z)$ نشان داده و قسمت موهومی آن را با $\mathrm{Im}(z)$ نشان می دهند.

$$\mathrm{Re}(z)=x \qquad \mathrm{Im}(z)=y$$

نکته: این مجموعه داری خاصیت ترتیبی نمی باشد، یعنی نمی توان اعضای آن را بر حسب بزرگی یا کوچکی مرتب کرد(بر خلاف اعداد حقیقی)

عملیات جبری بر روی اعدادمختلط بصورت $z = x + iy$

1- تساوی دو عدد مختلط

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad , \quad y_1 = y_2$$

2- جمع و تفریق دو عدد مختلط:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$$

3-ضرب دو عدد مختلط:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z_1.z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

در واقع درستی ضرب فوق را می توان بصورت زیر نیز بررسی کرد:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

4 -توان عدد مختلط:

$$z^n = z.z\ldots z$$

مثال:

$$i=\sqrt{-1}\,,\ i^2=-1\,,\ i^3=i.i^2=-\sqrt{-1}=-i\,,\ i^4=i^2.i^2=+1$$

$$i^5=i^2.i^3=-1(-i)=i$$

$$i^n=\begin{cases}1 & n=4k\\ i & n=4k+1\\ -1 & n=4k+2\\ -i & n=4k+3\end{cases}$$

5- تقسیم دو عدد مختلط:

توجه داشته باشید که در تعریف عمل تقسیم در دستگاه اعداد حقیقی، ابتدا عضو وارون ضربی را برای دو عدد حقیقی تعریف کردیم و سپس عمل تقسیم را بصورت عمل ضرب تعریف نمودیم. حال سوال طبیعی این است که چگونه می توان عمل تقسیم در $\mathbb{C}$ را به صورت ضرب تعریف کرد؟

برای انجام این کار، نیاز به تعریف مفهومی به نام مزدوج یک عدد مختلط خواهیم داشت.

مزدوج یک عدد مختلط

اگر $z=x+iy$ یک عدد مختلط باشد، مزدوج آن را به صورت $\bar{z}=x-iy$ تعریف می کنیم. بنابرین

$$z.\bar{z}=x^2+y^2$$

با توجه به تعریف مزدوج عدد مختلط تقسیم دو عدد مختلط به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{z_1}{z_2 \neq (0,0)} = z_1 \times \frac{1}{z_2} = (x_1 + y_1 i)\frac{1}{x_2 + y_2 i} = (x_1 + y_1 i)\frac{x_2 - y_2 i}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)}$$

$$= \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{{x_2}^2 + {y_2}^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} i$$

توجه! مقدار $\sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ را قدرمطلق یا مدول (mod) عدد مختلط z تعریف می کنند و با نماد $|z| = |x + iy|$ نمایش می دهند.

نکته: اگر قسمت حقیقی یک عدد مختلط صفر باشد، به آن موهومی محض گویند.

نکته: در علوم فیزیک و زیر شاخه های آن، از آنجایی که از نماد i برای نمایش شدت جریان استفاده می شود، عدد موهومی $\sqrt{-1}$ را با j نمایش می دهند. پس $j=\sqrt{-1}$.

نکته: یک عدد مختلط را می توان به صور مختلف نمایش داد. به صورت $z=x+iy$ جبری عدد مختلط z می گویند.

مثال: حاصل عبارت $z=\dfrac{1+i}{i+2}$ را به صورت جبری بنویسید؟

$$z=\frac{1+i}{i+2}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

مثال: اگر $z_1 = 3-2i$ و $z_2 = -1+i$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{z_1}{z_2}$ را بدست آورید؟

$$\frac{3-2i}{-1+i} \times \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

تمرین: درستی هریک از موارد زیر را نشان دهید؟

1. $z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$

2. $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$ یا $\overline{\prod_{i=1}^{m} z_i} = \prod_{i=1}^{m} \overline{z_i}$

3. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ یا $\overline{\sum_{i=1}^{n} z_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i}$

3. $\left|z_1 . z_2\right| = \left|z_1\right|\left|z_2\right|$ یا $\left|\prod_{i=1}^{m} z_i\right| = \prod_{i=1}^{m}\left|z_i\right|$

4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|} \quad z_2 \neq (0,0)$

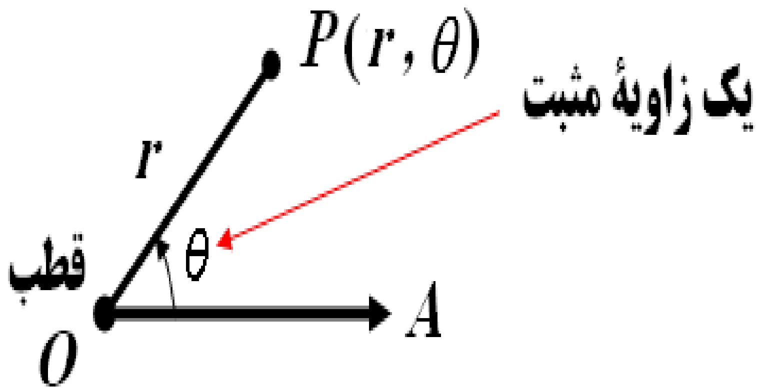
5. $\left|z_1 + z_2\right| \leq \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$

6. $\left|z_1 \pm z_2\right| \geq \left|z_1\right| - \left|z_2\right|$

7. $-\left|z_1 . \bar{z}_2\right| \leq \operatorname{Re}(z_1 . \bar{z}_2) \leq \left|z_1 . \bar{z}_2\right|$

تعبیر هندسی اعداد مختلط و نمایش قطبی آن

از آن جایی که هر عدد مختلط را می توان به صورت یک زوج مرتب از اعداد حقیقی نمایش داد، می توان صورت قطبی این زوج مرتب را به عنوان صورت قطبی عدد مختلط در نظر گرفت.



می توان یک زوج مرتب را به صورت قطبی به شکل $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$

نشان داد که در آن

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

حال می توان شکل قطبی عدد مختلط را به صورت زیر نوشت:

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = rcis\theta$$

نکته: هر عدد مختلط دارای یک بخش حقیقی و یک بخش موهومی و یک طول است

ولی تعداد بی شماری arg دارد.

با توجه به رابطه بالا می توان گفت: $r = \mathrm{mod}(z) \quad \theta = \arg(z) \quad 0 \le \theta < 2\pi$

نکته: به r طول یا مدول عدد مختلط و به θ آرگومان آن گویند.

برای مثال میتوان معادله دایره را به صورت قطبی بیان کرد:

$$A = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 = 1\right\} \quad \to \mathrm{A} = \left\{r = 1\,,\, 0 \le \theta < 2\pi\right\}$$

رابطه اویلر

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, e \approx 2.71828183$$

رابطه اویلر

$$\begin{cases} \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \\ \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} \end{cases}$$

در حالت کلی :

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}.e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

توجه!

$$if \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow z = r\cos\theta + ir\sin\theta \rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z = re^{i\theta}$$

مثال: صورت قطبی $z=1-i$ را بنویسید؟

$$x=1\,,\,y=-1$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=-1 \quad \Rightarrow \theta=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$$

صورت قطبی: $z=\sqrt{2}cis\frac{7\pi}{4}$

مثال: اگر z یک عدد مختلط باشد، طول و آرگمان e^{z+i} چقدر است؟

$$e^{x+iy+i}=e^{x+i(y+1)}=e^{x}.e^{i(y+1)}\equiv re^{i\theta}\Rightarrow\begin{cases}r=e^{x}\\ \theta=y+1\end{cases}$$

قضیه دموآور

اگر $z_1=x_1+iy_1=r_1 cis\theta_1$ و $z_2=x_2+iy_2=r_2 cis\theta_2$ باشد، آنگاه

$$z_1.z_2=r_1r_2cis(\theta_1+\theta_2)$$

اثبات:

$$z_1.z_2 = r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\right] =$$
$$r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1)\right]$$
$$= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

نکته: در ضرب دو عدد مختلط در صورت قطبی،کافی است r ها را در هم ضرب و θ ها را با هم جمع کنیم.

توجه! اگر $z_1 = z_2 = z$ آنگاه $z_1.z_2 = z^2 = (rcis\theta)^2 = r^2 cis2\theta$.

نکته:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{r} = \frac{cis(-\theta)}{r} = r^{-1}cis(-\theta)$$

بنابرین در تقسیم دو عدد محتلط در صورت قطبی، کافی است r ها بر هم تقسیم و θ ها را از هم کم کنیم.

$$z_1 z^{-1}{}_2 = z_1.\overline{z}_2 = r_1 r^{-1}{}_2 cis(\theta_1 - \theta_2)$$

مثال: نسبت های مثلثاتی $\sin 3\theta$ را برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ بدست آورید؟

$$z = rcis\theta \Rightarrow z^3 = r^3(cis\theta)^3 = r^3(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

$$\cos^3\theta + 3\cos^2\theta i\sin\theta + 3\cos\theta i^2\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta$$

$$= \cos^3\theta + i3\sin\theta\cos^2\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos 3\theta$$

$$3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta = \sin 3\theta$$

مثال: اگر $z = x + iy = rcis\theta$ و $\bar{z} = x - iy = rcis(-\theta)$ آنگاه

$$z.\bar{z} = r^2 cis(\theta - \theta) = r^2 = x^2 + y^2$$

مثال: عبارت $\frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{i}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{i}}$ را به صورت قطبی بنویسید؟

روش دیگر: $\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1-1+2i}{2} = i$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} cis(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}) = i$$

صورت کلی قضیه دموآور

اگر $z_1, z_2, \ldots, z_n$ اعداد مختلط با شند، آنگاه خواهیم داشت:

$$z_1.z_2\ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n cis(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)$$

حال اگر $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ باشد، آنگاه

$$z_1.z_2\ldots z_n = z^n = (rcis\theta)^n = r^n cis(n\theta)$$

بنابرین:

$$z^n = r^n cis(n\theta)$$

مثال: حاصل عبارت $(1+i)^{12}(2+2\sqrt{3}i)$ را بدست آورید؟

$$z_1 = (1+i) = \sqrt{2}cis\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow z_1^{12} = (\sqrt{2}cis\frac{\pi}{4})^{12} = 64cis3\pi = -64$$

$$z_2 = 2+2\sqrt{3}i \quad \Rightarrow z_2 = 4cis\frac{\pi}{3}$$

$$z_1.z_2 = (64cis3\pi)(4cis\frac{\pi}{3}) = 256cis\frac{4\pi}{3}$$

ریشه های اعداد مختلط

فرض کنیم $z_0 = r_0 cis\theta_0$ می خواهیم $z_0^{\frac{1}{n}}$ را بدست آوریم. از آنجایی که $z_0^{\frac{1}{n}}$ خود یک عدد مختلط است

$$z_0^{\frac{1}{n}} = z = rcis\theta$$

با بدست آوردن r و θ در واقع ریشه nام عدد مختلط z_0 بدست می آید.

$$z_0^{\frac{1}{n}} = z \Rightarrow z^n = z_0 \Rightarrow z^n = r^n cis(n\theta) = r_0 cis\theta_0$$

$$\begin{cases} r^n = r_0 \\ \cos n\theta = \cos\theta_0 \\ \sin n\theta = \sin\theta_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = r^{\frac{1}{n}}{}_0 \\ \theta = \dfrac{2k\pi + \theta_0}{n}, k = 0,1,\ldots,n-1 \end{cases}$$

پس به طور کلی می توان گفت:

$$u_{k+1} = \sqrt[n]{r_0}\ cis\frac{2k\pi + \theta_0}{n}, k = 0,1,\ldots,n-1$$

$$k=0\Rightarrow u_1=\sqrt[n]{r_0}\,cis\,\frac{\theta_0}{n}$$

$$k=1\Rightarrow u_2=\sqrt[n]{r_0}\,cis\,\frac{2\pi+\theta_0}{n}$$

$$k=2\Rightarrow u_3=\sqrt[n]{r_0}\,cis\,\frac{4\pi+\theta_0}{n}$$

$$\vdots$$

$$k=n-1\Rightarrow u_n=\sqrt[n]{r_0}\,cis\,\frac{2(n-1)\pi+\theta_0}{n}$$

$$if\quad k=n\Rightarrow u=\sqrt[n]{r_0}\,cis\,\frac{2n\pi+\theta_0}{n}=\sqrt[n]{r_0}\,cis(2\pi+\frac{\theta_0}{n})==\sqrt[n]{r_0}\,cis\,\frac{\theta_0}{n}=u_1$$

مثال: ریشه پنجم $2+2i$ را بدست آورید؟

$$z=\sqrt[5]{2+2i}\rightarrow r_0=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2} \quad , \quad \tan\theta_0=\frac{2}{2}=1\Rightarrow\theta_0=\frac{\pi}{4}$$

$$r=\sqrt[5]{2\sqrt{2}}=\sqrt[5]{\sqrt{8}}=\sqrt[10]{8}$$

$$u_{k+1}=\sqrt[10]{8}\ cis\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{n} \qquad k=0,1,2,3,4$$

این پنج ریشه بر روی صفحه $\mathbb{R}^2$ ، رئوس یک پنج ضلعی منتظم محاط در دایره ای به شعاع $\sqrt[10]{8}$ می باشد.

مثال: معادلات زیر را حل کنید؟

الف) $t^3 - 1 = 0$

$t = \sqrt[3]{1} \qquad x_0 = 1 \, , y_0 = 0 \, , r_0 = 1$

$\theta = 0 \quad r = \sqrt[3]{1} = 1$

$u_{k+1} = cis\,\frac{2k\pi}{3} \qquad$ (k=0,1,2)

ب) $t^2 - 1 = 0$

$t = \sqrt{1} \qquad x_0 = 1 \, , y_0 = 0 \, , r_0 = 1$

$\theta_0 = 0 \, , \; r = \sqrt{1} = 1$

$u_{k+1} = cis(k\pi) \qquad$ (k=0,1)

ج) $z = \sqrt[6]{i}$

$$x_0 = 0, y_0 = 1, r_0 = 1$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \quad , \quad r = \sqrt[6]{1} = 1$$

$$u_{k+1} = cis \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{6} \qquad (k=0,1,2,3,4,5)$$

د) $z = \sqrt[3]{1-i}\sqrt{1+i}$

$$\sqrt[6]{(1-i)^2(1+i)^3} = \sqrt[6]{(-2i)(2-2i)} = \sqrt[6]{4+4i}$$

$$x_0 = 4, y_0 = 4, r_0 = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$$\tan\theta_0 = 1 \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{4} \qquad r = \sqrt[12]{32}$$

$$u_{k+1} = \sqrt[12]{32} cis \frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{6} \qquad (k=0,1,2,3,4,5)$$

مثال: مکان هندسی $|z+4| = |z-2|$ چه شکلی است؟

$$|x+iy+4|=|x+iy-2| \Rightarrow \sqrt{(x+4)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2} \Rightarrow (x+4)^2+y^2=(x-2)^2+y^2$$
$$\Rightarrow 12x=-12 \Rightarrow x=-1$$

مکان هندسی مورد نظر خط $x=-1$ می باشد.

تمرین: نشان دهید n ریشه n ام واحد، رئوس یک n-ضلعی منتظم را تشکیل می دهند.

تمرین: اگر z_0 ریشه ای از معادله $f(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1 z+a_0$ باشد، آنگاه مزدوج آن نیز ریشه این چند جمله ای است. $(a_i \in \mathbb{R})$

تمرین: اگر w یکی از ریشه های nام واحد باشد،آنگاه

$$1+2w+3w^{2}+\ldots+nw^{n-1}=\frac{n}{w-1}$$ است.

تمرین: نشان دهید، معادله $|z+3|+|z-3|=10$ ، معادله یک بیضی است.

تمرین: هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

1. $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

2. $|z^{n}|=|z|^{n}$

3. $\bar{\bar{z}}=z$

4. $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

5. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

6. $\sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

تمرین: اگر $\operatorname{Re}(z) > 0$، آنگاه $Arg(z + \bar{z}) = 0$.

تمرین: ریشه چهارم $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}$ را حساب کنید؟

تمرین: ریشه معادلات زیر را بدست آورید؟

1. $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$

2. $z^6 + z^4 + z^2 + 1 = z^5 + z^3 + z$

3. $z^4 + 4z^3 + 7z^2 + 6z + 3 = 0$

تمرین: اگر w ریشه سوم واحد باشد و $w \neq 0$ نشان دهید:

1. $1 + w + w^2 = 0$

2. $(1+w^{2})^{4}=w$

3. $(1-w+w^{2})(1+w-w^{2})=4$

تمرین: ثابت کنید.

$$\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^{n}=\frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$$

تمرین: مکان هندسی z را بیابید؟

1. $\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-i+1\right|+\left|z+i-1\right|=3\right\}$

2. $\{z \in \mathbb{C} : 4 \le |z - i + 1| + |z + i - 1| \le 6\}$

تمرین: اگر $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ و $|z_2| \ne |z_3|$ نشان دهید:

$$\left|\frac{z_1}{z_2 + z_3}\right| \le \frac{|z_1|}{\left||z_2| - |z_3|\right|}$$