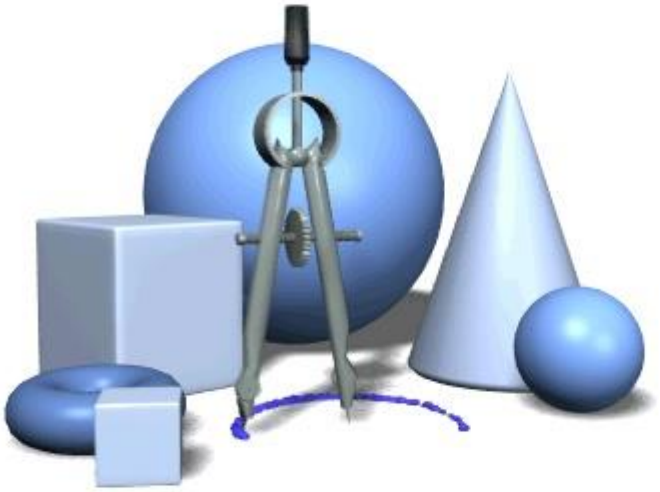
جزوه درسی

ریاضی عمومی (۱)



گردآوری و تدوین:

جعفر اوج بگ

منابع: ۱-ریاضی عمومی(۱) (دکتر مهدی نجفی خواه) ۲-ریاضی عمومی(۱و۲) (دکتر عرفانیان-کامیابی گل)

۳-جزوه درسی ریاضی (۱)(دکتر غلامی) ۴-مسایل حل شده ریاضیات آپوستل ۵-خلاصه درس ریاضی (۱) پیام نور

فصل اول) آشنایی با نظریه مجموعه ها، اعداد و توابع:

۱. نظریه مجموعه ها

مجموعه عبارت است از یک دسته از اشیاء یا اشخاص یا حروف یا اعداد ... که کاملاً مشخص شده باشند. هر یک از عوامل متشکله مجموعه را یک عنصر یا عضو مجموعه خوانند.

مثال :

1. مجموعه اعداد ۱، ۳، ۷ و ۹.
2. مجموعه افرادی که در ایران زندگی می کنند.

مجموعه ها را عموماً به دو طریق نشان می دهند. ممکن است یک مجموعه را با معرفی و نوشتن تمام عناصر آن مشخص کرد.مانند مجموعه

A = {۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹}

ممکن است یک مجموعه را به وسیله تعریف خصوصیات اجزای آن مشخص کرد.

مانند A = {x : عددی فرد و مثبت و کوچکتر از ۱۱ است x}

B = {x : عددی صحیح فرد است x}

اگر عنصر a به مجموعه ای مانند A تعلق داشته باشد، یعنی A شامل a باشد، در این صورت می نویسند $a \in A$ و می خوانند a متعلق است به A. عدم تعلق a را به مجموعه A به صورت $a \notin A$ نشان می دهند

اگر تعداد عناصر یک مجموعه عدد محدود معینی باشد مجموعه را **محدود** خوانند، مانند مجموعه روزهای هفته، ولی اگر تعداد عناصر یک مجموعه نامحدود باشد مجموعه را **نامحدود** گویند.

دو مجموعه B , A را **مساوی** گویند اگر دقیقاً دارای عناصر همانندی باشند. تساوی دو مجموعه را به صورت A=B نشان می دهند. عدم تساوی دو مجموعه را به $B \neq A$ نشان می دهند.

مجموعه ای را که دارای عنصری نباشد مجموعه **تهی** یا **خالی** خوانند و آن را با ϕ نشان می دهند. مثلاً مجموعه افرادی که قد آنها ۴ متر است.

اگر هر عنصر متعلق به مجموعه A متعلق به مجموعه B نیز باشد، بنابه تعریف، A را **زیرمجموعه** B نامند و به صورت $A \subset B$ نشان می دهند و می خوانند A زیرمجموعه B است، در زبان ریاضی علامت $\forall$ به معنی «هر چه

باشد» و علامت $\Rightarrow$ «نتیجه می دهد،» خوانده می شود. با توجه به معنای این علائم، مجموعه A را زیرمجموعه B می خوانند اگر : $(\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$

اگر A زیرمجموعه B , B ≠ A باشد، A را **زیرمجموعه محض** B خوانند.

در نتیجه دو مجموعه B , A برابرند، اگر و فقط اگر، هر یک زیرمجموعه دیگری باشند، یعنی :
$(A \subset B \,, B \subset A) \Leftrightarrow A = B$

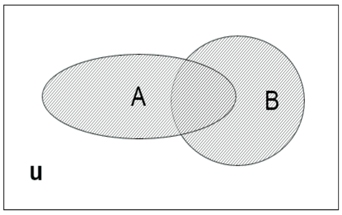
مجموعه ای، که عناصرش خود مجموعه باشند، را **مجموعه مجموعه ها** یا **کلاس** خوانند، مانند $A = \{\varphi, \{1,2\}\}$، که یک کلاس است. بنا به تعریف، مجموعه ای که عناصرش تمامی زیرمجموعه های یک مجموعه باشند، مجموعه توانی آن مجموعه نامیده می شود. مثلاً اگر {۳و۲و۱} = A باشد مجموعه توانی آن، که با P (A) نمایش داده می شود، برابر است با :

$$P(A) = \{\varphi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$$

اگر عناصر یک مجموعه را در نظر بگیریم می توان این مجموعه را زیرمجموعه یک مجموعه کلی تر دانست. این مجموعه کلی را مجموعه جهانی نامیده. با U نشان می دهیم. مثلاً اگر {۳و۲و۱} = A باشد، A را می توان زیرمجموعه اعداد طبیعی دانست، لذا می توان U را مجموعه اعداد طبیعی فرض کرد.

بر روی مجموعه ها، عملیات اتحاد و اشتراک و تفاضل و حاصل ضرب را تعریف می کنیم.

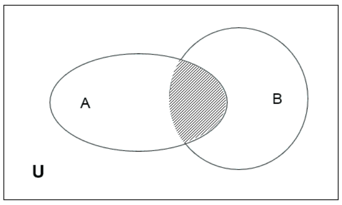
اجتماع دو مجموعه A ,B عبارت از مجموعه ای است که تمام عناصرش به مجموعه A یا مجموعه B و یا به هر دو مجموعه تعلق داشته باشند.



اجتماع دو مجموعه را می توان به صورت زیر نشان داد :

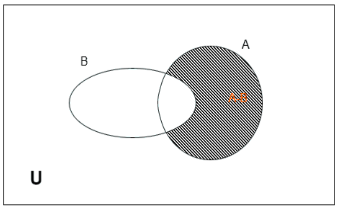
$$A \cup B = \{x : x \in A \ \text{یا} \ x \in B\}$$

اشتراک دو مجموعه B , A مجموعه ای است که عناصرش به هر دو مجموعه تعلق داشته باشند.



$$A \cap B = \{x : x \in A \,, x \in B\}$$

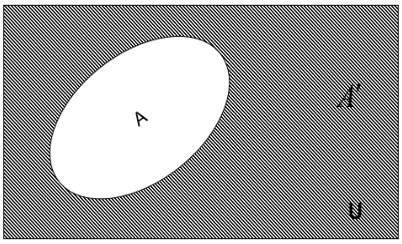
تفاضل دو مجموعه B ,A مجموعه ای است



که عناصرش به A تعلق داشته، ولی به B تعلق نداشته باشند.

$$A - B = \{x : x \in A \,, x \notin B\}$$

بنا به تعریف، **مکمل** مجموعه A، مجموعه ای است از عناصر مجموعه جهانی U که به A تعلق نداشته باشند.



$$A'=\{x : x \notin A \ , \ x \in U\}$$

و یا به طور ساده .

$$A'=\{x : x \notin A\}$$

اگر توجه شود، داریم

$$A'=U-A$$

اجتماع و اشتراک سه مجموعه دارای خاصیت شرکت پذیری است، یعنی :

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

خاصیت توزیعی اشتراک نسبت به اتحاد $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

خاصیت توزیعی اشتراک نسبت به اتحاد $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

همچنین قوانین دومورگان عبارتند از :

$$\left.\begin{array}{l}(A\cup B)'=A'\cap B' \\ (A\cap B)'=A'\cup B'\end{array}\right\}$$

دو مجموعه B , A مفروضند. بنا به تعریف، حاصل ضرب این دو مجموعه که آن را به A × B نشان داده و A در B می خوانیم برابر است با :

$$A\times B=\{(a,b): a\in A, \ \ b\in B\}$$

دو مجموعه B , A را در نظر می گیریم، هر زیرمجموعه ای از A × B را یک رابطه (یا بستگی)ای از A در B خوانند. اگر $(x,y)\in R$ ، باشد، می نویسند، xRy و می‌گویند x رابطه R با y دارد.

اگر R، رابطه ای از A در B باشد معکوس رابطه R عبارت است از :

$$R^{-1}=\{(y,x):(x,y)\in R\}$$

۲. مجموعه اعداد

اعداد طبیعی: مجموعه این اعداد را با نماد $\mathbb{N}$ نشان می دهیم و $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ توجه داریم که این مجموعه نسبت به اعمال $+$ و $\times$ بسته است. معادلات $x+1=1$ و $x+1=0$ در این مجموعه جواب ندارند.

اعداد صحیح: مجموعه اعداد صحیح را با نماد $\mathbb{Z}$ نشان می دهیم و $\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ می باشد. مجموعه اعداد صحیح نسبت به اعمال $+$، $\times$ و $-$ بسته است. عدد ۱ عضو خنثی عمل $\times$ و عد صفر عضو خنثی عمل $+$ است.

نکته: در بین دو مجموعه $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ یک تناضر یک به یک وجود دارد، درواقع میتوان گفت که به بیان ریاضی میتوان یک تابع ۱-۱ و پوشا بین این دو مجموعه برقرار کرد.

اعداد گویا: این مجموعه را با نماد $\mathbb{Q}$ نشان می دهیم که $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}, m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}, (m,n)=1\right\}$. این مجموعه نسبت به اعمال $+$، $\times$ و $-$ بسته است. عضو $\frac{1}{a}$ را وارون ضربی a می گوییم. معادله $x^2-2=0$ در $\mathbb{Q}$ ریشه ندارد، بنابراین این مجموعه کاملی از اعداد نیست و نیاز به تکمیل دارد.

توجه داشته باشید که اعداد گویا یک مجموعه چگال را تشکیل می دهند، یعنی بین هر دو عدد گویا یک عدد گویا وجود دارد!

اعداد حقیقی: مجموعه این اعداد را با $\mathbb{R}$ نمایش می دهیم، برای معرفی $\mathbb{R}$ ابتدا باید تعریفی از غیر گویا (اصم) داشته باشیم که مجموعه این اعداد با اعداد گویا مجموعه اعداد حقیقی را تشکیل می دهند. $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}^c$

اعداد اصم یا غیر گویا: اعدادی هستند که بسط اعشاریشان نامتناهی بوده و دارای هیچ دوره گردشی نباشد. این تعریف به طور مستقیم ازتعریف عدد گویا حاصل می شود. همانطور که می دانیم در نمایش بسط اعشاری یک عدد، اگر عدد دارای بسط اعشاری متناهی بوده و یا دارای دوره گردش باشد، آن عدد یک عدد گویا است.

مثلاً اعداد $\sqrt{2}=1.144213...$ و $\pi=3.141522...$ اعداد اصم می باشند.

مثال: دو عدد اصم α و β بیاورید بطوریکه α^β گویا باشد.

$\alpha=2^{\sqrt{2}}$ $\qquad \beta=\sqrt{2}$ $\qquad \alpha^\beta=(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2^2=4$

خواص جبری و ترتیبی اعداد حقیقی:

مجموعه $\mathbb{R}$ با دو عمل + و × دارای خواص زیر است: ($\forall x, y, z \in \mathbb{R}$)

A1) $x+(y+z)=(x+y)+z \qquad x(yz)=(xy)z$ (شرکت پذیری)

A2) $x+y=y+x \qquad xy=yx$ (جابجایی)

A3) $x+x'=x \qquad x\times x^*=x \qquad (\forall x\in\mathbb{R}\quad \exists x'\in\mathbb{R}\quad \exists x^*\in\mathbb{R})$

A4) $x+x'=0 \qquad x\times x^*=1$ (عضو قرینه و وارون ضربی)

A5) $x(y+z)=xy+xz$ (پخش ضرب نسبت به جمع)

اعمال تفاضل و تقسیم را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x-y=x+(-y) \qquad x\div y=x\times\frac{1}{y}$$

مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ زیر مجموعه ای دارد و $\mathbb{R}^+$ که شامل تمام اعدادی است که در خواص زیر صدق می کند، این مجموعه، مجموعه تمام اعداد حقیقی مثبت نامیده می شود.

۱. به ازای هر عدد حقیقی x ، فقط یکی از معادلات زیر درست است:

$$x\in\mathbb{R}^+ \;;\; x=0 \;,\; -x\in\mathbb{R}^+$$

۲. اگر $x,y\in\mathbb{R}^+$ آنگاه $x+y\in\mathbb{R}^+$

اگر فرض کنیم که $\mathbb{R}^+$ موجود است. می توان یک رابطه ترتیبی بصورت زیر را در $\mathbb{R}$ تعریف کرد:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\;, if\;\; y-x\in\mathbb{R}^+\Rightarrow x<y$$

یعنی x کمتر از y است و

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\;, if\;\; y-x\in\mathbb{R}^+\Rightarrow x>y$$

یعنی x بیشتر از y است.

با توجه به این نمادگذاری و خواص جبری اعداد حقیقی می توان $\mathbb{R}^+$ را به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$$

۳- برای هر عدد حقیقی x , y دقیقاً یکی از عبارات زیر صحیح است:

$$x>y \quad ; \quad x=y \quad ; \quad x<y$$

۴- اگر $x,y,z\in\mathbb{R}$ باشد، بطوریکه $x<y$ و $y<z$ آنگاه $x<z$

۵- اگر $x,y,z\in\mathbb{R}$ باشد، بطوریکه $x<y$ آنگاه $x+z<y+z$

۶- اگر $x<y$ و $z>0$ باشد، آنگاه $xz<yz$ و اگر $z<0$ آنگاه $xz>zy$

توان

برای هر عدد حقیقی و $n \in \mathbb{N}$ تعریف می کنیم:

$*\ a^n = a \times a \times \cdots \times a$

$*\ a^0 = 1\ ,\ a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad a \neq 0$

خواص مقدماتی زیر، نتایجی هستند که از خ.اص جبری اعداد حقیقی و تعاریف فوق نتیجه می شوند:

1- $(a_1 a_2)^n = a_1^n a_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a_1, a_2 \in \mathbb{R} | a_1, a_2 \neq 0\ \ if\ \ a \leq 0$

2- $(a^m)^n = a^{mn} \quad a^{m+n} = a^m . a^n \qquad \forall m, n \in \mathbb{Z}\ , a \in \mathbb{R}$ (اگر $m \leq 0$ یا $n \leq 0$ باشد و $a \neq 0$)

3- $if \quad n \in \mathbb{N} \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R} \quad ,\quad 0 \leq b_1 \leq b_2 \Rightarrow b_1^n \leq b_2^n$

مختصات: برای تعیین وضعیت نقاط واقع بر روی یک صفحه ، یا فضا، ... از مختصات استفاده می‌شود.

۳. اعداد مختلط:

معادله $x^2 + 1 = 0$ در مجموعه اعداد حقیقی دارای ریشه نمی باشد، یعنی بر روی محور اعداد حقیقی نقطه ای را نمی توان یافت که در معادله فوق صدق کند. حال فرض کنید $i = \sqrt{-1}$ (هر چند در $\mathbb{R}$ بی معنـی اسـت) بنـابراین $i^2 = -1$ و معادله فوق دارای جواب $x^2 = i^2$ خواهد بود.

مثال: معادله $x^2 + 7 = 0$ را در نظر بگیرید:

$x^2 = -7 = i^2 7 \qquad x = \pm i\sqrt{7}$

یک عدد مختلط همواره به صورت یک زوج مرتب $z = (x, y)$ که $x, y \in \mathbb{R}$ است. بـه صـورت نمـادین $(x, 0)$ بـه عنوان یک عدد حقیقی و $i = (0,1)$ به عنوان یک عدد مختلط در نظر گرفته می شود.

یک عدد مخـتلط بـه صـورت $a + ib$ تعریـف مـی شـود کـه در آن a و b دو عـدد حقیقـی و I را واحـد موهـومی گویند.(Imaginary unit)

$\mathbb{C} = \left\{ z\ :\ z = a + ib\ ,\ a, b \in \mathbb{R}\ ,\ i = \sqrt{-1} \right\}$

نکته: توجه داشته باشید، اگر در یک عدد مختلط $b=0$ باشد، عدد حاصل یک عدد حقیقی می باشد. بنابراین $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

نکته: اگر $z=a+ib$ باشد، قسمت حقیقی z را با $\operatorname{Re}(z)$ نشان داده و قسمت موهومی آن را با $\operatorname{Im}(z)$ نشان می دهند.

$\operatorname{Re}(z)=a \qquad \operatorname{Im}(z)=b$

نکته: این مجموعه داری خاصیت ترتیبی نمی باشد، یعنی نمی توان اعضای آن را بر حسب بزرگی یا کوچکی مرتب کرد(بر خلاف اعداد حقیقی)

عملیات جبری روی اعداد مختلط:

۱- تساوی دو عدد مختلط

$$\left.\begin{array}{l} z_1=a_1+ib_1 \\ z_2=a_2+ib_2 \end{array}\right\} \Rightarrow z_1=z_2 \Leftrightarrow a_1=a_2 \ , \ b_1=b_2$$

۲- جمع و تفریق دو عدد مختلط:

$$\begin{array}{l} z_1=a_1+ib_1 \\ \qquad\qquad \Rightarrow \ z_1\pm z_2=a_1\pm a_2+i(b_1\pm b_2) \\ z_2=a_2+ib_2 \end{array}$$

۳- ضرب دو عدد مختلط:

$$i=\sqrt{-1} \quad i^2=-1 \quad i^3=i.i^2=-\sqrt{-1}=-i \quad i^4=i^2.i^2=+1 \quad i^5=i^2.i^3=-1(-i)=i$$

$$i^n=\begin{cases} 1 & n=4k \\ i & n=4k+1 \\ -1 & n=4k+2 \\ -i & n=4k+3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} z_1=a_1+ib_1 \\ \qquad\qquad \Rightarrow \ z_1z_2=a_1a_2-b_1b_2+i(a_1b_2+a_2b_1)\xrightarrow[b_1=-b_2=b]{a_1=a_2=a} a^2+b^2+i(-ab+ab)=a^2+b^2 \\ z_2=a_2+ib_2 \end{array}$$

٤-تقسیم دو عدد مختلط:

اگر $z=a+ib$ یک عدد مختلط باشد، مزدوج آن را به صورت $\bar{z}=a-ib$ تعریف می کنیم. با توجه به تعریف مزدوج عدد مختلط تقسیم دو عدد مختلط به صورت زیر تعریف می شود:

$$z_1=a_1+ib_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z_1}{z_2}=z_1\times\frac{1}{z_2}=(a+bi)\frac{1}{c+di}=(a+bi)\frac{c-di}{(c+di)(c-di)}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2},(z_2\neq 0)$$

$$z_2=a_2+ib$$

توجه! مقدار $\left|z.\bar{z}\right|=\sqrt{a^2+b^2}$ را قدرمطلق یا مدول(mod) عدد مختلط z تعریف می کنند و با نماد $|z|$ $|a+ib|=|z|$ نمایش می دهند.

$$z.\bar{z}=a^2+b^2\in\mathbb{R} \qquad \bar{z}=a-ib$$

$$z=a+ib\begin{cases}a=\mathrm{Re}(z)\\ b=\mathrm{Im}(z)\\ i=\sqrt{-1}\Rightarrow i^2=-1\end{cases}$$

نکته: اگر قسمت حقیقی یک عدد مختلط صفر باشد، به آن موهومی محض گویند.

نکته: در علوم فیزیک و زیر شاخه های آن، از آنجایی که از نماد i برای نمایش شدت جریان استفاده می شود، عدد موهومی $\sqrt{-1}$ را با j نمایش می دهند. پس $j=\sqrt{-1}$

روابط اعداد مختلط:

1. $z_1+z_2=z_2+z_1$	2. $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$
3. $\exists 0\in\mathbb{C},\forall z\in\mathbb{C},z+0=z$	4. $\forall z\in\mathbb{C},\exists -z\in\mathbb{C},z+(-z)=0$
5. $z_1z_2=z_2z_1$	6. $\exists 1\in\mathbb{C},\forall z\in\mathbb{C},1z=z\ ,\ (1=(1,0))$
7. $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z$	8. $\left|z_1.z_2\right|=\left|z_1\right|.\left|z_2\right|$ یا $\left|\prod_{i=1}^{m}z_i\right|=\prod_{i=1}^{m}\left|z_i\right|$
9. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|} \quad z_2\neq 0$	10. $z^n=(re^{i\theta})^n=r^ne^{in\theta}$
11. $z^{\frac{1}{n}}=\left[re^{i(2k\pi+\theta)}\right]^n=r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i(2k\pi+\theta)}{n}} \quad k=0,1,2,...,n-1$	12. $\left\|z_1\right|-\left|z_2\right\|\leq\left|z_1+z_2\right|\leq\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$
13. $\arg(z_1.z_2)=\arg(z_1)=\arg(z_2)$	14. $\arg(\frac{z_1}{z_2})=\arg(z_1)-\arg(z_2)$
15. $\left|z^n\right|=\left|z\right|^n$	16. $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$
17. $\overline{z_1.z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$ یا $\overline{\prod^{m}z_i}=\prod^{m}\overline{z_i}$	18. $Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$

مثال های حل شده(اعداد مختلط):

۱) اگر $u = 1 - i$، $v = 2 - i$ و $w = 3 - i$، آنگاه

$$\begin{aligned} uvw &= u[vw] = (1-i)(2-i)(3-i) \\ &= (1-i)\big[(6-1)+(-2-3)i\big] \\ &= (1-i)(5-5i) = (5-5)+(-5-5)i \\ &= 0-10i = -10i. \end{aligned}$$

۲) اگر $u = 4 + 3i$ و $v = 3 - 4i$، آنگاه

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} &= u\frac{1}{v} = (4+3i)\frac{1}{3-4i} \\ &= (4+3i)\left(\frac{3}{9+16}+\frac{4}{9+16}i\right) \\ &= (4+3i)\left(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right) \\ &= \left(\frac{12}{25}-\frac{12}{25}\right)+\left(\frac{9}{25}+\frac{16}{25}\right)i = i. \end{aligned}$$

اگر $z = 1 + \sqrt{2}i$، آنگاه

$$z^2 - 2z + 3 = (2\sqrt{2}i - 1) - 2(1 + \sqrt{2}i) + 3 = 0$$

مثال ۳) نشان دهید که اعداد مختلط $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ وقتی و تنها وقتی بر یک خط راست قرار دارند که اعداد حقیقی α و β و γ چنان یافت شوند که $\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0$ و $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

حل: برای این منظور، توجه می‌کنیم که نقاط z_1 و z_2 و z_3 وقتی و تنها وقتی بر یک خط راست واقعند که بردارهای $\overrightarrow{z_1z_2}$ و $\overrightarrow{z_1z_3}$ موازی باشند، یعنی عددی حقیقی مانند α یافت شود که $\overrightarrow{z_1z_3} = t\overrightarrow{z_1z_2}$. به بیان دیگر $z_3 - z_1 = t(z_2 - z_1)$ یا $(t-1)z_1 - tz_2 + z_3 = 0$. اکنون کافی است فرض شود $\alpha = t - 1$، $\beta = -t$ و $\gamma = 1$. بر عکس این حکم به صورت مشابه قابل اثبات می‌باشد.

زوج مرتب:

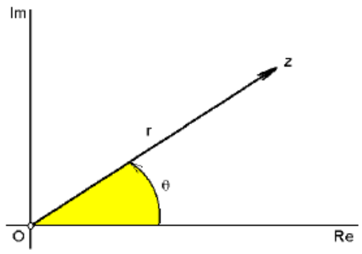
هر دو عدد حقیقی x و y که به صورت (x,y) نوشته شوند،یک زوج مرتب نامیده می شود که نمایش یک نقطه در صفحه میباشد.

از نقطه نظر منطقی تعریف عدد مختلط به صورت یک زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی x و y معادل تعریف عدد مختلط است، اگر شرایط زیر برای (x,y) برقرار باشند.

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1=x_2, y_1=y_2$$
$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$$
$$(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$$
$$m(x,y)=(mx,my)$$
$$(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} if\ \ z=x+iy \\ and\ \ (x,y)=x(1,0)+y(0,1)\end{array}\right. \Rightarrow\ 1\equiv(1,0)\quad i\equiv(0,1)$$

از آن جایی که هر عدد مختلط را می توان به صورت یک زوج مرتب از اعداد حقیقی نمایش داد، می توان صورت قطبی این زوج مرتب را به عنوان صورت قطبی عدد مختلط در نظر گرفت.



یک زاویهٔ مثبت

می توان یک زوج مرتب را به صورت قطبی به شکل $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ نشان داد که در آن

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\qquad\qquad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

حال می توان شکل قطبی عدد مختلط را به صورت زیر نوشت:

$$z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)=rcis\theta$$

با توجه به رابطه بالا می توان گفت: $r=\mathrm{mod}(z)$ $\quad$ $\theta=\arg(z)\quad 0\le\theta\le 2\pi$

نکته: هر عدد مختلط دارای یک بخش حقیقی و یک بخش موهومی و یک طول است ولی تعداد بی شماری arg دارد.

برای مثال میتوان معادله دایره را به صورت قطبی بیان کرد:

$$A=x^2+y^2=1\ \rightarrow \mathrm{A}=\left\{r^2=1\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi\right\}$$

قضیه دموآور:

اگر $z_1, z_2, \ldots, z_n$ اعداد مختلط با شند، آنگاه خواهیم داشت:

$$z_1.z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n cis(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)$$

حال اگر $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ باشد، آنگاه

$$z_1.z_2 \ldots z_n = (rcis\,\theta)^n = r^n cis(n\theta)$$

مثال های حل شده)

۱) چون $1+i = \sqrt{2}e^{\pi/4}$، داریم:

$$\begin{aligned}
(1+i)^{25} &= \left(\sqrt{2}e^{\pi i/4}\right)^{25} \overset{(7)}{=} \left(\sqrt{2}\right)^{25} e^{25\pi/4i} \\
&= 2^{12}\sqrt{2}e^{(6\pi+\pi i/4)} \overset{(3)}{=} 2^{12}\sqrt{2}e^{\pi i/4} \\
&\overset{(2)}{=} 2^{12}\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2^{12}\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= 2^{12}(1+i)
\end{aligned}$$

۲) چون $1+\sqrt{3}i = 2e^{\pi i/4}$ و $1-i = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$، داریم:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{30} &= \left(\frac{2e^{\pi i/3}}{\sqrt{2}e^{-\pi i/4}}\right)^{30} \\
&\overset{(6)}{=} \left(\sqrt{2}e^{(\pi i/3+\pi i/4)}\right)^{30} \overset{(7)}{=} (\sqrt{2})^{30} e^{30(7\pi i/12)} \\
&= 2^{15}e^{(17\pi+\pi i/2)} \overset{(3)}{=} 2^{15}e^{-\pi i/2} \\
&\overset{(2)}{=} 2^{15}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2^{15}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2^{15}i.
\end{aligned}$$

ریشه های اعداد مختلط:

اگر $z = rcis\theta$ آنگاه $z^n = r^n cis(n\theta)$ می باشد. با استفاده از این رابطه می توان ریشه یک عدد مختلط را به صــورت $z^{\frac{1}{n}} = u = \varphi cis\phi \Rightarrow z = u^n = \varphi^n cisn\phi$ حساب کرد، که در آن:

$\varphi^n = r \Rightarrow \varphi = \sqrt[n]{r}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos n\phi = \cos\theta \\ \sin n\phi = \sin\theta\end{array}\right. \Rightarrow n\phi = 2k\pi + \theta \Rightarrow \phi = \frac{2k\pi + \theta}{n} \qquad (\text{k=0,1,...,n-1})$$

پس به طور کلی می توان گفت: $u_{k+1} = \sqrt[n]{r}\ cis\ \dfrac{2k\pi + \theta}{n}$

$$k = 0 \Rightarrow u_1 = \sqrt[n]{r} cis \frac{\theta}{n}$$
$$k = 1 \Rightarrow u_2 = \sqrt[n]{r} cis \frac{2\pi + \theta}{n}$$
$$k = 2 \Rightarrow u_3 = \sqrt[n]{r} cis \frac{4\pi + \theta}{n}$$
$$\vdots$$
$$k = n-1 \Rightarrow u_n = \sqrt[n]{r} cis \frac{2(n-1)\pi + \theta}{n}$$
$$if \quad k = n \Rightarrow u = \sqrt[n]{r} cis \frac{2n\pi + \theta}{n} = \sqrt[n]{r} cis (2\pi + \frac{\theta}{n}) == \sqrt[n]{r} cis \frac{\theta}{n} = u_1$$

مثال) فرض کنید $z = 1$ و $n = 3$ در این صورت، سه ریشهٔ سوم عدد یک برابرند با

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1e^{0i}} = \sqrt[3]{1}\exp\left\{\frac{0+2k\pi}{3}i\right\}$$

که در آن $k = 0, 1, 2$. برای $k = 0$، داریم

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}1e^{0i} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

برای $k = 1$، داریم

$$\sqrt[3]{1} = 1e^{2\pi/2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

برای $k = 2$، داریم

$$\sqrt[3]{1} = 1e^{4\pi i/3} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

۴. تابع:

اگر B , A دو مجموعه باشد، هر رابطه از A در B را یک تابع خوانند، اگر در آن دو زوج مرتب پیدا نشود که مختص اول آنها مساوی و مختص دومشان متفاوت باشد.

مثال)

فرض کنید $\mathbb{R} = X = Y$. در این صورت

۱) تناظر $x \mapsto x$ یک تابع است (تابع همانی). مثلاً، $f(5) = 5$.

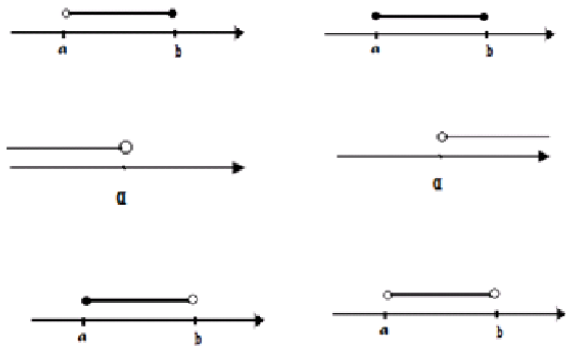
۲) تناظر $x \mapsto x^2$ یک تابع است. مثلاً، $f(1) = 1$، $f(2) = 4$ و $f(-3) = 9$.

۳) تناظر «$x \mapsto \sqrt{x}$ اگر و فقط اگر $x = y^2$» تابع نیست، زیرا $x = 1$ به دو عنصر $y = 1$ و $y = -1$ متناظر می‌شود.

دامنه و برد تابع:

فرض می کنیم f تابعی از A در B باشد. مجموعه ای متشکل از تمامی مختصات اول زوج های مرتب $(x,y)\in f$ را دامنه تعریف f گویند و آن را به D_f نشان می دهند و مجموعه مختصات دوم را به R_f نشان داده و آن را برد تابع گویند.

فاصله (بازه):



$a \le x \le b$, $[a , b]$

$a \le x \le b$, $(a , b]$

$a \le x < b$, $[a , b)$

$a < x < b$, (a , b)

$x > a$, $(a , +\infty)$

$x < a$, $(-\infty , a)$

توابع حقیقی:

توابعی هستند که دامنه و برد آنها مجموعه اعداد حقیقی یا زیر مجموعه ای از R باشند و به صورت زیر نمایش می دهند:

$f:A \longrightarrow B$

مجموعه A رادامنه و B را هم دامنه گویند. با ضابطه $y=f(x)$

برد تابع زیر مجموعهء مجموعه B می باشد.

تابع پوشا:

اگر مجموعه B مساوی برد تابع باشد،تابع را پوشا گویند.خط موازی با محورx ها نمودار تابع پوشا را حد اقل در یک نقطه قطع می کند.

تابع یک به یک:

خط موازی با محور x ها نمودار تابع یک به یک را حد اکثر در یک نقطه قطع می کند.

شرط یک به یک بودن : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

*توجه: تابعی که هم پوشا و هم یک به یک باشد ، تناظر یک به یک گویند.

مثال:

توابع f و g به صورت زیر داده شده‌اند.

$$g:R-\{1\}\to R \qquad g(x)=\frac{3-8x^3}{1-x^3}$$

$$f:R-\{3\}\to R \qquad f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-3}}$$

ثابت کنید f یک به یک است.

حل:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x_1+3}{x_1-3}}=\sqrt[3]{\frac{x_2+3}{x_2-3}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1+3}{x_1-3}=\frac{x_2+3}{x_2-3}\Rightarrow 1+\frac{6}{x_1-3}=1+\frac{6}{x_2-3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1-3}=\frac{1}{x_2-3}\Rightarrow x_1-3=x_2-3$$

$$\Rightarrow x_1=x_2$$

پس f یک به یک است.

مثال:

) تابع $f: R-\{1\} \to R-\{a\}$ با ضابطه زیر داده شده است:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$$

اولاً: ثابت کنید f یک به یک است.

حل:

$$f(x)=\frac{2x-2+1}{x-1}=2+\frac{1}{x_1-1}$$

$$f(x)=f(x_2) \Rightarrow 2+\frac{1}{x_1-1}=2+\frac{1}{x_2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1-1}=\frac{1}{x_2-1} \quad \Rightarrow \quad x_1-1=x_2-1$$

$$\Rightarrow \quad x_1=x_2$$

پس f یک به یک است.

ثانیاً a را طوری بیابید که f پوشا باشد.

حل: باید $R_f=R-\{a\}$ را در نظر بگیریم. ابتدا R_f را به صورت زیر می‌یابیم:

$$y=\frac{2x-1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{x-1}=y-2$$

$$\Rightarrow x-1=\frac{1}{y-2} \Rightarrow x=1+\frac{1}{y-2}$$

$$\Rightarrow R_f=R-\{2\} \qquad \Rightarrow a=2$$

تابع علامت:

$$Sing(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases} \qquad Sing(x)=\begin{cases} \frac{x}{|x|} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$$

****تابع همانی:** اگر به ازای هر x ، f(x)=x باشد در اینصورت f را همانی گویند.

****تابع ثابت:** اگر به ازای هر x متعلق به D_f ، f(x)=b باشد، f، را ثابت گویند

تساوی دو تابع:دو تابع fوg با هم مساویند اگر: الف) $D_f=D_g$ باشد

ب) به ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(x)=g(x)$

مثال های حل شده(تساوی دو تابع)

۱) $f(x)=\dfrac{x}{x}, g(x)=1$

مساوی نیستند چون $D_g=R$ و $D_f=R-\{0\}$ با هم برابر نیستند.

۲) $g(x)=x$ و $f(x)=(\sqrt{x})^2$

مساوی نیستند چون $D_g=R$ و $D_f=[0,+\infty)$ با هم برابر نیستند.

۳) $g(x)=x+2$ و $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ با هم برابر نیستند.

مباحث بیشتر:

تابع زوج : $\begin{aligned} &x\in D_f \Rightarrow -x\in D_f \\ &f(-x)=f(x)\end{aligned}$

تابع فرد : $\begin{aligned} &x\in D_f \Rightarrow -x\in D_f \\ &f(-x)=-f(x)\end{aligned}$

ترکیب توابع : $(fog)(x)=f(g(x)) \quad : \quad D_f=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

معکوس ترکیب توابع : $h(x)=(fog)(x)\rightarrow h^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$

نکات تستی در مورد توابع زوج و فرد:

۱- تنها تابعی که هم زوج و هم فرد است تابع $f(x)=0$ است. البته بعضی از توابع در ظاهر تابع صفر نیستند ولی در باطن تابع صفرند مانند $f(x)=\left[\dfrac{x^2}{x^2+a}\right]$ کـه $a>0$. اینگونه توابع همانطور که گفته شد هم زوجند و هم فرد.

۲- تابع f زوج است هرگاه نمودارش نسبت به محور y ها متقارن باشد.

۳ - تابع f فرد است هرگاه مبدا مختصات مرکز تقارن نمودارش باشد.

٤ -

	f و g هر دو زوج	f و g هر دو فرد	f زوج و g فرد
$f+g$	زوج	فـرد	معلوم نیست
$f-g$	زوج	فـرد	معلوم نیست
$f.g$	زوج	زوج	فـرد

☺ **نکته تستی :**

شرط تشکیل fog و gof به ترتیب برابر است با $R_g \cap D_f \neq \phi$ و $R_f \cap D_g \neq \phi$.

$$.f(x)=\frac{x+1}{x-1} \quad , \quad g(x)=\frac{1}{x}$$

$$f+g(x)=f(x)+g(x)=\frac{x+1}{x-1}+\frac{1}{x}$$

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}}=\frac{x^2+x}{x-1}$$

$$gof(x)=f(g(x))=\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{x-1}{x+1}$$

$$fog(x)=\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}=\frac{x+1}{1-x}$$

نکته:

$$f^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in f\}$$

برای بدست آوردن ضابطه تابع معکوس یک تابع ابتدا x را برحسب y پیدا می‌کنیم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم

مثال:

وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید:

الف) $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$

حل: این تابع یک به یک است. پس وارون دارد و داریم:

$$y = \frac{3x+2}{x-1} \Rightarrow yx - y = 3x+2 \Rightarrow x(y-3) = y+2$$
$$\Rightarrow x = \frac{y+2}{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

ب) $f(x) = \sqrt{x-۴}$.

حل: این تابع یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است و داریم:

$$y = \sqrt{x-4} \Rightarrow x-4 = y^2 \Rightarrow x = y^2+4$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2+4$$

ج) $$f(x) = \begin{cases} x & x > ۱ \\ x^۲ & ۱ \le x \le ۹ \\ ۲۷\sqrt{x} & ۹ < x \end{cases}$$

حل) چون هر ضابطه یک به یک است، تابع یک به یک و وارون‌پذیر است:

$$f_۱(x) = x \quad , \quad x > ۱ \quad \Rightarrow f_۱^{-۱}(x) = x \qquad x > ۱$$
$$f_۲(x) = x^۲ \quad , \quad ۱ \le x \le ۹ \quad \Rightarrow \quad f_۲^{-۱}(x) = \sqrt{x} \quad ۱ \le x \le ۸۱$$
$$f_۳(x) = ۲۷\sqrt{x} \quad x \rangle ۹ \quad \Rightarrow \quad f_۳^{-۱}(x) = \frac{x^۲}{(۲۷)^۲} \qquad x \rangle ۸۱$$

$$\Rightarrow \quad f^{-۱}(x) = \begin{cases} x & x > ۱ \\ \sqrt{x} & ۱ \le x \le ۸۱ \\ (\dfrac{x}{۲۷})^۲ & x > ۸۱ \end{cases}$$

توابع صعودی ونزولی:

الف) تابع f را صعودی گوییم هرگاه :

$$\forall x_۱ , x_۲ \in D_f \; ; \; x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \le f(x_۲)$$

اگر تساوی از نامساوی فوق حذف گردد f را اکیداً صعودی گوییم.

ب) تابع f را نزولی گوییم هرگاه :

$$\forall x_۱ , x_۲ \in D_f \; ; \; x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \ge f(x_۲)$$

تابع جزء صحیح:

تابع $f : R \to Z$ با ضابطه $f(x)=[x]$ را تابع جزء صحیح گویند.

هر $x \in R$ را می توان به صورت $x=n+r$ نوشت که $n \in R$ و $0 \le r < 1$.

بنا بر این :

$$۰ < x < ۱ \to [x] = ۰$$
$$۱ < x < ۲ \to [x] = ۱$$
$$-۱ < x < ۰ \to [x] = -۱$$
$$-۲ < x < -۱ \to [x] = -۲$$

خواص تابع جزء صحیح:

۱) $[x+k]=[x]+k \qquad k \in z$

۲) $[x] \le x < [x]+1$

۳) $x-1 < x[x] < x$

۳) $0 \le x-[x] < 1$

۴) $x-1 < [x] < x$

۵) $[x]+[-x] = \begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۱ & x \notin Z \end{cases}$

تعیین دامنه توابع:

الف)توابع چند جمله ای از درجه n

ب)توابع اصم با فرجه فرد

دامنه آنها R است

ج) توابع اصم با فرجه زوج f(x)= $\sqrt{g(x)} \to g(x) \ge ۰$

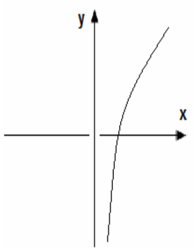
د)تابع گویا: $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)} \leftarrow$ D_f =R-{ریشه های مخرج}

نکته:

در توابع هموگرافیک $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ داریم :

$$D_f = R - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

تابع لگاریتمی:



تابع نمائی در دامنه تعریف خود یک به یک است لذا معکوس دارد.

اگر اعداد ۲و ۳را داشته باشیم با عمل توان رسانی می توان به عدد ۸ رسید $۸=۲^۳$

اما اگر اعداد ۲ و ۸ را داشته باشیم چگونه می توانیم به عدد ۳ برسیم؟

چون نقش y, x را عوض کردیم پس باید تابع نمایی معکوسی تعریف کنیم که همان <u>تابع لگاریتمی</u> است. $y = a^x \Leftrightarrow \log_a^y = x$

<u>دامنه تابع لگاریتمی:</u> $y=\log_a^x \qquad x>۰ \quad , a>۰ \quad a\neq ۱$

نکته:

دامنه توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ برابر R است.

توابع f و g با دامنه‌های D_f و D_g مفروضند. در این صورت :

۱) $(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad ; \quad D_{f+g}=D_f \cap D_g$

۲) $(f-g)(x)=f(x)-g(x) \quad ; \quad D_{f-g}=D_f \cap D_g$

۳) $(fg)(x)=f(x)g(x) \quad ; \quad D_{fg}=D_f \cap D_g$

۴) $(f/g)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)} \quad ; \quad D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g - \left\{x \middle| g(x)=۰\right\}$

دامنه ترکیب توابع:

$$D_{fog}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

نکته:

در هنگام محاسبه دامنه یک تابع نباید ضابطه آن را ساده کنیم مگر آن که مطمئن شویم که عنصر اضافی وارد دامنه تابع نشده است.

مثال های حل شده (دامنه توابع)

(۱) دامنه هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $f(x)=\sqrt{x^۲+۱}$

حل: $D_f=R \quad x^2+1\geq \circ \quad \Rightarrow$

۲) $f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^۲-۵x+۲۱}}$

حل: $x^۲-۵x+۲۱=x^۲-۵x+\frac{۲۵}{۴}+\frac{۵۹}{۴}=(x-\frac{۵}{۲})^۲+\frac{۵۹}{۴}>\cdot\Rightarrow D_f=R$

۳) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$

حل: $D_f=(\circ,+\infty)$

4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-7x+12}} \qquad x^2-7x+12=0\Rightarrow x_1=4, x_2=3$

$\Rightarrow D_f=(-\infty,۳)\cup(۴,+\infty)$

۵) $f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^۲-x+۲}}\Rightarrow x^۲-x+۲=x^۲-x+\frac{۱}{۴}+\frac{۷}{۴}$

$=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>0\Rightarrow D_f=R$

6) $f(x)=\dfrac{x^2}{x}\Rightarrow D_f=R-\{\circ\}$

۷) $f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow D_f=(\circ,+\infty)$

۸) $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x^۲+۲x+۱)(-x^۲+x-۱)}{x^۲-۵x+۶}}$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{(x+1)^2(-x^2+x-1)}{(x-2)(x-3)}}$$

$(x+1)^2 \geq 0 \qquad , \qquad -x^2+x-1<0 \qquad \Rightarrow$ صورت کسر ≤ 0

باید مخرج کسر همراه منفی باشد و مخالف صفر یعنی $2<x<3$.

$\Rightarrow D_f=(2,3)$

۹) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-5+6} \qquad \Rightarrow x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

$\Rightarrow D_f=(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

۱۰) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1} \qquad \Rightarrow D_f=R-\{-1\}$

۱۱) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}} \qquad \Rightarrow x\neq|x| \Rightarrow x<0 \qquad \Rightarrow D_f=(-\infty,0)$

۱۲) $f(x)=\sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow D_f=[-1,1]$

مثال فرض کنید $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در این صورت

$$D_f=\mathbb{R}, \quad R_f=[1,+\infty), \quad D_g=[0,+\infty), \quad R_g=[0,+\infty)$$

پس $(f\circ g)(x)=f(\sqrt{x})=x+1$ که به طور مستقیم دامنه تعریف $f\circ g$ برابر $\mathbb{R}$ است ولی طبق تعریف داریم

$$D_{f\circ g}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x\in[0,+\infty), \sqrt{x}\in\mathbb{R}\}=[0,+\infty)$$

البته برای $g\circ f$ از هر دو طریق یك نتیجه حاصل می شود

$$(g\circ f)(x)=g(x^2+1)=\sqrt{x^2+1}$$

که به طور مستقیم دامنه تعریف $g\circ f$ برابر $\mathbb{R}$ است و بنابه تعریف داریم

$$D_{g\circ f}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}, x^n+1\in[0,+\infty)\}=\mathbb{R}$$

مسایل حل شده مروری فصل

مسئله ۱)

فرض کنید $\mathbb{R} = X = Y$. هشت مثال زیر نشان می‌دهند که خواص یکبیک بودن، پوشا بودن و سراسری بودن مستقلند. یعنی تابع می‌تواند یکی از این خواص را داشته باشد، مستقل از اینکه خواص دیگر را دارا باشد و یا اینکه نباشد!

$f(x)$	D_f	R_f	یکبیک	پوشا	سراسری
x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	✓	✓	✓
$\log x$	$(0;+\infty)$	$\mathbb{R}$	✓	✓	
10^x	$\mathbb{R}$	$(0;+\infty)$	✓		✓
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty)$	$[0;+\infty$	✓		
x^3+x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$		✓	✓
$\tan x$	$\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{2}\}$	$\mathbb{R}$		✓	
x^2	$\mathbb{R}$	$[0;+\infty)$			✓
$1/x^2$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$(0;+\infty)$			

مسئله ۲)

فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ است. ضمن تعیین دامنه و برد f، مشخص کنید که آیا f یکبیک است؟

حل: وقتی و تنها وقتی $x \in D_f$ که کسر $\frac{x^2}{1+x}$ تعریف شود، یعنی $1+x \neq 0$. پس، دامنهٔ f عبارت است از $D_f = \mathbb{R}-\{-1\}$.

برای تعیین برد f فرض می‌کنیم $y\in\mathbb{R}$. معادلهٔ $f(x)=y$ را در نظر می‌گیریم: $\dfrac{x^2}{1+x}=y$، یا $x^2-yx-y=0$. بنابراین

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{y^2+4y}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{(y+2)^2-4}\right) \end{aligned}$$

پس اگر $(y+2)^2-2^2 \geq 0$، یعنی اگر $|y+2| \geq 2$، آنگاه x ای هست که $f(x)=y$. اما، این شرط معادل با این گفته است که $y+2 \geq 2$ یا $y+2 \leq -2$. یعنی، $y \in (-\infty;-4] \cup [0;+\infty)$. بنابراین، برد f عبارت است از $R_f = (-\infty;-4]\cup[0;+\infty)$. بعلاوه، تابع f یکبیک نیست، زیرا ملاحظه می‌شود که $f(1) = f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

مسئله ۳)

اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ به ازاء هر x ای در تساوی $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=x^2$ صدق می‌کند، ضابطهٔ f را مشخص می‌کنید.

حل: برای این منظور فرض می‌کنیم $y=\dfrac{x}{x+1}$، پس $xy+y=x$، یا $x=\dfrac{y}{1-y}$. بنابراین $f(y)=\left(\dfrac{y}{1-y}\right)^2$. اکنون با تعویض y به x، بدست می‌آوریم $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$. توجه شود که این تساوی تنها برای x های مخالف یک و منفی یک درست است. چرا؟

مسئله ۴)

فرض کنید $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$ در این صورت اولاً تابع $f(x)$ و ثانیاً دامنه تعریف و برد آن را به دست آورید.

حل. فرض کنیم $t=x+\frac{1}{x}$ در این صورت $t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ پس $t^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$ لذا ضابطه تابع f به صورت $f(t)=t^2-2$ حاصل می‌شود. واضح است که $D_f=\mathbb{R}$ و چون $t^2\geq 0$ پس $R_f=[-2,\infty)$.

مسئله ۵)

توابع سادهٔ $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=2-x$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$f(x)+2g(x)=(x^2+1)+2(2-x)=x^2-4x+5,$$

$$f(x)g(x)=(x^2+1)(2-x)=-x^3-2x^2-x+2,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x^2+1)}{(2-x)}=-x-2-\frac{3}{x-2},$$

$$f(g(x))=f(2-x)=(2-x)^2+1=x^2-4x+5,$$

$$g(f(x))=g(x^2+1)=2-(x^2+1)=-x^2+1,$$

$$f(f(x))=f(x^2+1)=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2,$$

$$g(g(x))=g(2-x)=2-(2-x)=x.$$

مسئله ۶)

توابع سادهٔ $f(x)=1/x$ و $g(x)=x^2$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$، و $D_g=\mathbb{R}$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{x^2},\qquad D_{f\circ g}=\mathbb{R}-\{0\}.$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2},\qquad D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\{0\}.$$

$$(f\circ f)(x)=f(x^2)=x^4,\qquad D_{f\circ f}=\mathbb{R}.$$

$$(g\circ g)(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1/x}=1,\qquad D_{g\circ g}=\mathbb{R}-\{0\}.$$

مسئله ۷)

معکوس تابع $f(x)=\dfrac{2x+3}{4x+5}$ را مشخص کنید.

حل: برای این منظور توجه می‌کنیم که اولاً $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{-5}{4}\right\}$. پس اگر $x\neq\frac{-5}{4}$، آنگاه $4xf(x)+5f(x)=2x+3$ و یا $(4f(x)-2)x=3-5f(x)$. بنابراین $x=\frac{(3-5f(x))}{(4f(x)-2)}$. این نشان می‌دهد که $f^{-1}(x)=\frac{3-5x}{4x-2}$. بعلاوه

$$R_f=D_f^{-1}=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

مسئله ۸)

تابع $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ فرد است، زیرا

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln\left|\frac{(-x)-1}{(-x)+1}\right|=\ln\left|\frac{-x-1}{-x+1}\right|\\&=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=-\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=-f(x)\end{aligned}$$

مسئله ۹)

اگر $f(\arcsin(\dfrac{x-1}{x+1}))=x+2$ باشد، مقدار $f(x)$ را بیابید؟

$$\arcsin(\frac{x-1}{x+1})=t\Rightarrow x(1-\sin t)=1+\sin t\Rightarrow x=\frac{1+\sin t}{1-\sin t}$$

$$f(t)=\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+2\Rightarrow f(t)=\frac{3-\sin t}{1-\sin t}\to f(x)=\frac{3-\sin x}{1-\sin x}$$

مسئله ۱۰)

دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{۱-۳x^۲+\mathrm{sgn}(|\sqrt{۲-۵x}|)}{\sqrt{۳-۸x}}$ را به دست آورید.

حل. با توجه به تعریف رادیکال باید داشته باشیم $۲ - ۵x \geq ۰$، $۳ - ۸x > ۰$ بنابراین $x \leq \frac{۵}{۲}$ و $x < \frac{۳}{۸}$. لذا اشتراک این دو عبارت است از $x < \frac{۳}{۸}$ یعنی $D_f = (-\infty, \frac{۳}{۸})$.

فصل دوم) حد و پیوستگی:

مفهوم حد یکی از مفاهیم بسیار مهم ریاضی است و به جرأت می‌توان گفت حد یکی از اساسی‌ترین و قدیمی‌ترین مفاهیم ریاضی است که شالوده و اساس بسیاری از قسمتهای دیگر ریاضی مانند پیوستگی، مشتق پذیری، انتگرال‌گیری، دنباله‌ها و سری‌ها می‌باشد. و سایر شاخه‌های علوم تجربی و آمار و رشته‌های مهندسی، فیزیك، شیمی، علوم پزشکی و.... و به طور کلی هر جا که ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرد حد بیشترین نقش ممکن را دارا می‌باشد. در واقع می‌توان حد را به یك ماشین تعبیر کرد که براساس رفتار و کردار یك تابع در اطراف یك نقطه می‌تواند رفتار مطلوب آن تابع در آن نقطه را تعین نمایید و یا به تعبیری دیگر حد یکی از وسایل و ابزار بسیار مطمئن ریاضی است که براساس دانستن رفتار یك تابع در یك مجموعه بتوان رفتار آن تابع را در نقاط نزدیك به آن مجموعه تعیین نمود.

تعریف حد:

فرض کنید $y=f(x)$ تابعی باشد که برای تمام مقادیر نزدیک $x=x_0$ مگر خود x_0 تعریف شده باشد. می گوییم حد تابع $f(x)$، وقتی x به سمت x_0 نزدیک می شود، برابر L است و می نویسیم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \quad \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \ni 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

قضیه ۱. *حد یك تابع در یك نقطه در صورت وجود منحصر به فرد است.*

مثال)

$$\text{نشان دهید که}\ \lim_{x\to -۱}(۲x+۵)=۳$$

حل. فرض کنید $\epsilon>۰$ دلخواه باشد. طبق تعریف باید $\delta>۰$ چنان ارائه نماییم که برای هر x (چون حوزه تعریف تابع مورد بحث که چند جمله‌ای است تمام $\mathbb{R}$ است) اگر $۰<|x-(-۱)|<\delta$ آنگاه $|۲x-۵+۳|<\epsilon$ برای ارائه $\delta>۰$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$|۲x+۵-۳|<\epsilon \Leftrightarrow |۲x+۲|<\epsilon \Leftrightarrow ۲|x-(-۱)|<\epsilon \Leftrightarrow |x-(-۱)|<\frac{\epsilon}{۲} \quad (۳.۴)$$

بدین‌ترتیب کافی است $۰<\delta\leq\frac{\epsilon}{۲}$ در نظر بگیریم. چون در این صورت اگر $|x-(-۱)|<\delta$ آنگاه بنا به انتخاب δ، چون $\delta\leq\frac{\epsilon}{۲}$ پس داریم $|x-(-۱)|<\frac{\epsilon}{۲}$ که بنابه آنچه در بالا (۳.۴) آمد داریم

$$|۲x-۵+۳|<\epsilon$$

مثال)

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$1)\quad \lim_{x\to 1}(5x+4)=9 \qquad\qquad |5x+4-9|=5|x-1|<4$$

$$\Rightarrow\quad |x-1|<\frac{4}{5}$$

پس قرار می‌دهیم $\delta \le \frac{\varepsilon}{5}$

مثال)

$$)\quad \lim_{x\to 3}\ (x^2-10x)=-21$$

$$|x^2-10x+21|=|x-7|\,|x-3|$$

$$-1\langle x-3\langle 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2\langle x\langle 4 \quad \Rightarrow\quad \max|x-7| = |4-7|=3$$

کافی است $\delta \le \min\left\{1,\frac{\varepsilon}{3}\right\}$ در نظر گرفته شود.

مثال)

نشان دهید که تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در صفر دارای حد نیست.

حل. بنابه نتیجه فوق کافی است نشان دهیم که این تابع در هیچ همسایگی محذوف صفر کراندار نیست. فرض کنید که تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در همسایگی محذوف $D = (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ از صفر کرانی مانند $M > 0$ داشته باشد (فرض خلف) یعنی برای هر $x \in D$ داشته باشیم

$$\left|\frac{1}{x}\right| \leq M$$

فرض کنید عدد طبیعی $n \geq 2$ دلخواه باشد در این صورت $0 < \frac{\delta}{n} < \delta$ پس $\frac{\delta}{n} \in D$ در نتیجه

$$\left|\frac{1}{\delta/n}\right| \leq M$$

و یا $n \leq \delta M$ و این بدین معنی است که اعداد طبیعی از بالا کراندار هستند که یک تناقض است پس فرض خلف باطل است یعنی تابع $\frac{1}{x}$ در صفر دارای حد نیست. توجه نمایید که عکس نتیجه فوق در حالت کلی برقرار نیست یعنی کراندار بودن فقط یک شرط لازم برای وجود حد می‌باشد. برای اثبات این ادعا به مثال زیر توجه نمایید

نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \quad \text{اگر} \\ ۰ & x \notin \mathbb{Q} \quad \text{اگر} \end{cases}$$

در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست. (این تابع به تابع دیریکله معروف است که همان تابع مشخصه اعداد گویا می‌باشد)

حل. نخست توجه نمایید که چون برد تابع مجموعه $\{۱, ۰\}$ است پس تابع کراندار است اکنون نشان می‌دهیم که این تابع در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست. فرض کنید که این تابع در نقطه‌ای مانند $x_۰$ دارای حد باشد (فرض خلف) یعنی $\lim_{x\to x_۰} f(x) = b$ در نظر می‌گیریم $\epsilon = \frac{۱}{۴}$ (توجه نمایید که کافی است ϵ را از نصف طول جهش تابع یعنی $\frac{۱}{۲}$ کمتر بگیریم) در این صورت بنابه تعریف حد، همسایگی محذوف $D = (x_۰ - \delta, x_۰) \cup (x_۰, x_۰ + \delta)$ از $x_۰$ موجود است که برای هر $x \in D$ داریم

$$|f(x) - b| < \frac{۱}{۴}$$

بنابه خاصیت چگال بودن اعداد گنگ در اعداد حقیقی فرض کنید $x_۱, x_۲ \in D$ به ترتیب اعداد گویا و گنگ باشند در این صورت داریم

$$|f(x_۱) - b| = |۱ - b| < \frac{۱}{۴}, |f(x_۲) - b| = |۰ - b| = |b| < \frac{۱}{۴}$$

و با جمع کردن این دو نامساوی داریم

$$|۱ - b| + |b| < \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

یا $۱ < \frac{۱}{۲}$ که یك تناقض است. پس فرض خلف باطل است یعنی تابع دیریکله در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست. حال به اثبات قضیه‌ای می‌پردازیم که نشان می‌دهد که در حالتهای خاص حاصلضرب دو تابع که حتی یکی از آن دو تابع در یك نقطه دارای حد نباشد و فقط شرط لازم یعنی کراندار بودن در یك همسایگی از آن نقطه را دارا باشد می‌تواند دارای حد باشد.

قضیه ۲. *فرض کنید که برای توابع f ، g و h در همسایگی محذوفی از $x_۰$ داشته باشیم $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ و در این صورت اگر*

$$\lim_{x\to x_۰} f(x) = \lim_{x\to x_۰} h(x) = b$$

<u>مثال)</u>

فرض کنید n عددی طبیعی باشد در این صورت نشان دهید $\lim_{x\to ۰} \sqrt[n]{۱ + x} = ۱$.

حل. با استفاده از قضیه فشار، داریم
اگر $-۱ < x < ۱$ (که یك همسایگی از ۰ است). آنگاه

$$\begin{aligned} |x| < ۱ &\Rightarrow ۰ < ۱ - |x| < ۱ \\ &\Rightarrow ۰ < (۱ - |x|)^n \leq ۱ - |x| < ۱ + x \\ &\Rightarrow ۱ - |x| < \sqrt[n]{۱ + x} \end{aligned}$$

همچنین

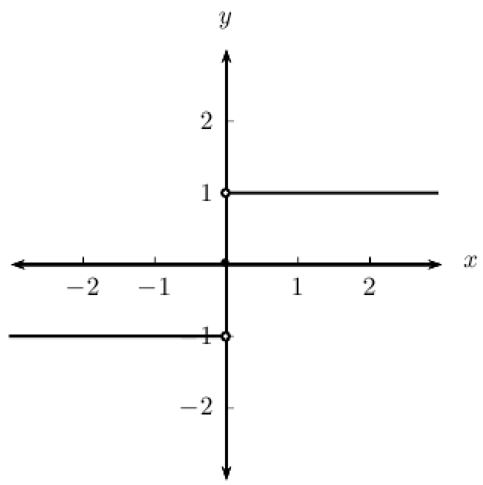
$$\begin{aligned} ۱ < ۱ + |x| &\Rightarrow (۱ + |x|)^n \geq ۱ + |x| \geq ۱ + x > ۰ \\ &\Rightarrow ۱ + |x| \geq \sqrt[n]{۱ + x} \end{aligned}$$

بنابراین تا کنون نشان داده‌ایم که اگر $x \in (-۱, ۱)$ آنگاه
$$۱ - |x| \leq \sqrt[n]{۱ + x} \leq ۱ + |x|$$

امّا $\lim_{x \to ۰}(۱ - |x|) = \lim_{x \to ۰}(۱ + |x|) = ۱$ پس بنا به قضیه فشار داریم
$$\lim_{x \to ۰} \sqrt[n]{۱ + x} = ۱$$

حد چپ و راست:

در مطالعه مفهوم حد به توابعی همچون تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ برمی‌خوریم. این تابع دارای نمودار زیر است:



یعنی برای $0 < x$ مقدار تابع ۱ و برای $0 > x$ مقدار تابع -1 است. این تابع در «۰» دارای حد نیست و در «۰» می‌توان دو تعریف وابسته به حد بیان کرد که آنها را حد راست و حد چپ تابع f در نقطه «۰» نامیم.

قضایای حد :

1) f(x)=k تابع ثابت ➔ $\lim_{x \to a} f(x) = k$

2) f(x)=x تابع همانی ➔ $\lim_{x \to a} f(x) = a$

3) f(x)= ax+b ➔ $\lim_{x \to x_0} f(x) = ax_0 + b$

نتیجه: حد توابع چندجمله ای در نقطه x_0 برابر است با مقدار تابع در x_0

مثال) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 3(-2)^3 - 2(-2)^2 + (-2) - 1 = -35$$

نتیجه: حد توابع چندجمله ای در نقطه x_0 برابر است با مقدار تابع در x_0

مثال) $f(x) = ۳x^۳ - ۲x^۲ + x - ۱$

$$\lim_{x \to -۲} f(x) = ۳(-۲)^۲ - ۲(-۲)^۲ + (-۲) - ۱ = -۳۵$$

****نکته:** در توابع کسری اگر $x \to a$ میل کند و a ریشه مخرج نباشد، حد تابع برابر است با مقدار تابع در آن نقطه(x_0)

مثال) $f(x) = \frac{۲x}{x-۱} \longrightarrow \lim_{x \to ۲} f(x) = \frac{۴}{۲-۱} = ۴$

مثال های حل شده:

حدهای زیر را حساب کنید.

$$۱)\quad \lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۳x-۴}=\lim\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)(x+۴)}=\lim\frac{x+۱}{x+۴}=\frac{۲}{۵}$$

$$۲)\quad \lim_{x\to -۱}\frac{x+\sqrt{x+۲}}{x+۱}=\lim\frac{(x^{۲}-x-۲)}{(x+۱)(x-\sqrt{x+۲})}=\lim\frac{(x+۱)(x-۲)}{(x+۱)(x-\sqrt{x+۲})}$$

$$=\lim\frac{x-۲}{x-\sqrt{x+۲}}=\frac{-۱-۲}{-۱-\sqrt{-۱+۲}}=\frac{-۳}{-۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$۳)\quad \lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{x^{۲}-۳x-۴}=\lim\frac{\sqrt{x}-۲}{(x+۱)(x-۴)}=\lim\frac{\sqrt{x}-۲}{(x+۱)(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)}$$

$$=\lim\frac{۱}{(x+۱)(\sqrt{x}+۲)}=\frac{۱}{۵\times ۴}=\frac{۱}{۲۰}$$

$$۴)\quad \lim_{x\to -۱}\frac{x^{۲}-۹x-۱۰}{x^{۲}+۳x+۲}=\lim\frac{(x-۱۰)(x+۱)}{(x+۲)(x+۱)}=\lim\frac{x-۱۰}{x+۲}=\frac{-۱۱}{۱}$$

$$۵)\quad \lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}+۱۹x-۲۰}{x^{۲}-۱}=\lim\frac{(x-۱)(x+۲۰)}{(x-۱)(x+۱)}=\lim\frac{x+۲۰}{x+۱}=\frac{۲۱}{۲}$$

$$۶)\quad \lim_{x\to ۹}\frac{x^{۲}-۸۱}{\sqrt{x}-۳}=\lim\frac{(x-۹)(x+۹)}{\sqrt{x}-۳}=\lim\frac{(\sqrt{x}-۳)(\sqrt{۳}+۳)(x+۹)}{\sqrt{x}-۳}$$

$$=\lim\ (\sqrt{x}+۳)(x+۹)=۱۰۸\{$$

$$7)\quad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x^{2}-x-6}=\lim\frac{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2})+1)}{(x+2)(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}=\lim\frac{x-3}{(x+2)(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x-2}+1)}=\frac{1}{5\times 2}=\frac{1}{10}$$

$$8)\quad \lim_{x\to -2}\frac{x^{3}+x^{2}+4}{x^{2}-4}=\lim\frac{(x+2)(x^{2}-x+2)}{(x^{\circ}-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^{2}-x+2}{x-2}=\frac{8}{-4}=-2$$

$$9)\quad \lim_{x\to 1}\frac{3x^{2}-2x-1}{x^{2}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(3x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\frac{3x+1}{x+1}=2$$

$$10)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^{20}-4x+3}{x^{15}-5x+4}=\lim\frac{x^{20}-x-3x+3}{x^{15}-x-4x+4}$$

$$=\lim\frac{x(x^{19}-1)-3(x-1)}{x(x^{14}-1)-4(x-1)}=\lim\frac{(x-1)(x(x^{18}+x^{17}+\ldots+x+1-3)}{(x-1)(x(x^{13}+x^{12}+\ldots+x+1-4)}$$

$$=\frac{19-3}{14-4}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$$

$$11)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^{4}+x^{3}-x-1}{x^{3}+3x^{2}-x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{4}-1+x(x^{2}-1)}{x(x^{2}-1)+3(x^{2}-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{2}-1)(x^{2}+1+x)}{(x^{2}-1)(x+3)}=\frac{3}{4}$$

$$12)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{x}=\lim\frac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$13)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim\frac{2x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{3}{2}$$

$$14)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}=\frac{2}{3}$$

تعریف حد راست و چپ:

فرض کنید که f یك تابع باشد در این صورت گوییم که حد راست تابع f در نقطه x_0 برابر b است یا تابع f به b میل می‌کند وقتی x از راست به x_0 میل می‌کند و آن را با نماد $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=b$ نمایش می‌دهیم. هر گاه برای هر $\epsilon>0$ عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $x\in D_f$ اگر $0<x-x_0<\delta$ آنگاه $|f(x)-b|<\epsilon$، که به صورت همسایگی تعریف فوق را می‌توان این طور بیان کرد که برای هر $\epsilon>0$، بازه $D=(x_0,x_0+\delta)$ موجود باشد که برای هر $x\in D\cap D_f$، داشته باشیم $|f(x)-b|<\epsilon$.

به طریق مشابه داریم که حد چپ تابع f در نقطه x_0 برابر b است هرگاه برای هر $\epsilon>0$، عدد $\delta>0$ موجود باشد که برای هر $x\in D_f$، اگر $0<x_0-x<\delta$ آنگاه $|f(x)-b|<\epsilon$ و یا به عبارت دیگر برای هر $\epsilon>0$، بازه $D=(x_0-\delta,x_0)$ موجود باشد که برای هر $x\in D\cap D_f$ داشته باشیم $|f(x)-b|<\epsilon$، حد چپ تابع f در نقطه x_0 را با نماد $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=b$ نمایش می‌دهیم.

مثال:

۱) $\lim_{x\to ۴^+}\frac{[x-۴]}{x-[x]}$

حل: $\lim_{x\to ۴^+} f(x)=\lim_{x\to ۴^+}\frac{[x]-۴}{x-[x]}=\lim_{x\to ۴^+}\frac{[۴+\delta]-۴}{۴+\delta-[۴+\delta]}=\lim_{x\to ۴^+}\frac{۴-۴}{۴+\delta-۴}=\frac{۰}{\delta}=۰$

($\lim_{x\to (-\frac{۱}{۵})^-} f(x)=\lim_{x\to (-\frac{۱}{۵})^-}\frac{[۵x+۱]}{۵x+۱}=\lim_{x\to (-\frac{۱}{۵})^-}\frac{[۵x]+۱}{۵x+۱}=\lim_{\to (-\frac{۱}{۵})^-}\frac{\left[۵(\frac{-۱}{۵})^-\right]+۱}{۵(\frac{-۱}{۵})^-+۱}=\lim_{\to (-\frac{۱}{۵})^-}\frac{[-۱-\delta]+۱}{-۱-\delta+۱}=\lim\frac{-۲+۱}{-\delta}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$

قضیه ۳ *شرط لازم و کافی برای آنکه* $\lim_{x\to x_\circ} f(x)=b$ *آن است که*

$$\lim_{x\to x_\circ^+} f(x)=\lim_{x\to x_\circ^-} f(x)=b$$

مسئله های امتحانی:

) مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع f در x=1 دارای حد باشد.

$$f(x)=\begin{cases}3x+4 & , \quad x\langle 1\\ [x]-a & \quad x\rangle 1\end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(۳x+۴)=۷$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)\quad \lim_{x\to ۱^+}([x]-a)=۱-a$$

$$\Rightarrow\quad ۱-a=۷\quad a=-۶$$

) فـرض کنیـد: $f(x)=\begin{cases} ۲x-a & x<-۳ \\ ax+۲b & -۳\le x\langle ۳ \\ b-\theta\, x & ۳<x \end{cases}$ a و b را طـوری تعیـین کنیـد کـه

$\lim f(x)$ و $\lim f(x)$ موجود باشند.

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳a+۳b=-۱۵ \\ -۲a+۲b=-۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-۵ \\ -a+b=-۳ \end{cases} \Rightarrow ۲b=-۸$$

$$\Rightarrow b=-۴ \qquad a=-۱$$

****نکته**: در موارد زیر برای محاسبه حد تابع، باید حد چپ و راست را محاسبه نمود

۱)**حد توابع چند ضابطه ای**

۲)**حد توابع قدرمطلقی** (a ریشه معادله f(x)=0باشد) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$

۳)**حد توابع جز صحیح** $a\in z \qquad ,\lim\limits_{x\to a}[x]$

۴)**حد توابع کسری و a ریشه مخرج باشد.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{A}{f(x)}$

۵)**حد توابع اصم با فرجه زوج** $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[۲k]{f(x)}$

****تذکر**: در این حالت ابتدا باید f(x) را تعیین علامت کنیم،چون ممکن است یکی از حدود چپ و راست به علت منفی بودن f(x) موجود نباشد.

۶)**حد تانژانت و کتانژانت وقتی که:** $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{۲}}\tan(x) \qquad , \qquad \lim\limits_{x\to k\pi}\cot(x)$

مثال ها:

۱) $\lim\limits_{x\to ۳}[x]$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^+}[x]=3\\ \lim\limits_{x\to 3^-}[x]=2\end{array}\right\}\Rightarrow$$ **تابع حد ندارد.**

۲) $\lim\limits_{x\to ۱}[۲x+۱]$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^+}[۲x+۱]=۳\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}[۲x+۱]=۲\end{array}\right\}\Rightarrow$$ تابع حد ندارد.

۳) $\lim\limits_{x\to ۱}[۳-۲x]=۳+\lim\limits_{x\to ۱}[-۲x]$ $\Rightarrow$ حد ندارد.

**توجه: اگر $a \in Z$ نباشد آنگاه حد $[x]$ برابر است با حد $[a]$

$$\lim_{x\to a^-}[x] = \lim_{x\to a^+}[x] = [a]$$

۴) $\lim\limits_{x\to ۵} \dfrac{|x-۵|}{۵-x}$ $\Rightarrow$ حد ندارد.

۵) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{(-۱)^{[x]}}{x-۲} = \dfrac{(-۱)^{۱}}{۱-۲} = \dfrac{-۱}{-۱} = ۱$

۶) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{(-۱)^{[x]}}{x-۲} = \dfrac{(-۱)^{\circ}}{۱-۲} = \dfrac{۱}{-۲} = -۱$

۷) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{x-|۲-x|-۲}{x-۲} = \lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{x-(۲-x)-۲}{x-۲} = \lim \dfrac{۲x-۴}{x-۲} = ۲$

۸) $\lim \dfrac{\sin x}{\sin ۲x} = \lim \dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{۲x}{\sin ۲x} \times \dfrac{۱}{۲} = ۱\times ۱\times \dfrac{۱}{۲} = \dfrac{۱}{۲}$

۹) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{\sin(x^۲-۱)}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱}(x+۱)\dfrac{\sin(x^۲-۱)}{x^۲-۱} = ۲$

۱۰) ۱۰) $\lim\limits_{x\to ۲}(x-۲)^۲ \sin \dfrac{۱}{\sqrt[۳]{x-۲}} = \circ$ (کراندار در حد صفر)

۱۱) $\lim\limits_{x\to 2}(x-[x])$ $\Rightarrow$ حد وجود ندارد.

۱۲) $\lim\limits_{x\to \circ} \dfrac{4x[x]}{2x+|x|}$

$\lim\limits_{x\to \circ^+} \dfrac{4x[x]}{2x+|x|} = \dfrac{\circ}{2x+x} = \circ$

$\lim\limits_{x\to \circ^-} \dfrac{4x[x]}{2x+|x|} = \dfrac{-4x}{2x-x} = -4$

$\Rightarrow$ حد ندارد.

**محاسبه حد کسرهای که به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ هستند:

- برای رفع ابهام باید صورت و مخرج را تجزیه کرد تا عامل صفر کننده حذف شود
- صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم.

مثال ۱:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x})^3-2^3}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim\frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$$=\sqrt[3]{64}+2\sqrt[3]{8}+4=4+4+4=12$$

مثال ۲:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)\frac{\sin(1-x)}{x-1}=-2$$

مثال ۳:

$$\lim\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt[4]{(x+1)^3}+\sqrt[4]{(x+1)^2}+\sqrt[4]{(x+1)}+1}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}=\frac{4}{3}$$

مسایل حل شده:

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{[x^{۲}]-x^{۲}}{x^{۲}}$ $\qquad \lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\dfrac{۰-x^{۲}}{x^{۲}}=-۱$

$$\lim_{x\to ۰^{-}} f(x)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{۰-x^{۲}}{x^{۲}}=-۱$$

۲) $\lim\limits_{x\to (-۲)^{-}}\dfrac{x^{۲}-۴}{x+۲}\,sign(x+۲)=\lim\limits_{x\to -۲^{-}}\dfrac{(x-۲)(x+۲)}{(x+۲)}\,sign(x+۲)=\lim\limits_{x\to -۲^{-}}(x-۲)sign(۰^{-})=-۴\times(-۱)=۴$

۳) $\lim\limits_{x\to ۳}(x^{۲}-۹)\sin\dfrac{۱}{x-۳}$

حل:

وقتی $x\to ۳$ میل میکند $(x^{۲}-۳)$ برابر با صفر است پس جواب صفر است.

۴) $\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{[x]-۲}{x^{۲}-۴}=۰$ $\qquad \lim\dfrac{[۲+\delta]-۲}{۰^{+}}=\dfrac{۲-۲}{۰^{+}}=۰$ $\qquad x^{۲}-۴=۰\Rightarrow x=\pm ۲$

	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x^{۲}-۹$		+	0	-	0	+	

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^{\tan x} = ?$$

وقتی $x \to \frac{\pi}{2}$ میل کند، حد به صورت 1^{∞} در می آید.

فرض می کنیم: $y = (\sin x + \cos x)^{\tan x}$

از طرفین رابطه زیر Ln می گیریم.

$$Lny = \tan x Ln(\sin x + \cos x) \longrightarrow$$ حد می گیریم

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (Lny) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x Ln(\sin x + \cos x) = \infty \times 0 \to$$ به $\frac{0}{0}$ تبدیل می کنیم

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{Ln(\sin x + \cos x)}{\cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ه}} \ldots = 1 \to \lim y = e$$

حد در بینهایت:

الف) **توابع کسری:**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^m + bx^{m-1} + \ldots + k}{a'x^n + b'x^{n-1} + \ldots + k'}$$

از بالاترین توان x در صورت و مخرج فاکتور می گیریم.

مثال) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 10x}{2x^3 + x^2 + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3(1 + \frac{6}{x} + \frac{10}{x^2} + \frac{2}{x^3})}{x^3(2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3})} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 10x}{2x^3 + x^2 + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3(1 + \frac{6}{x} + \frac{10}{x^2} + \frac{2}{x^3})}{x^3(2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3})} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to^{-} \infty} \sqrt{\frac{x+1}{4x-1}} = \lim_{x \to^{-} \infty} \sqrt{\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(4-\frac{1}{x})}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$ ق ق $+\frac{1}{2}$

نکته: اگر f(x) از درجه m باشد و g(x) از درجه n دو چند جمله ای باشند آنگاه:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{a_m x^m}{b_m x^n} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_m} & m = n \\ \infty & m > n \\ ۰ & m < n \end{cases}$$

مثال:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ... + n^۲}{۵n^۳ + n + ۱} = ?$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}}{\frac{۵n^۳ + n + ۱}{۱}} = \lim_{n \to \infty} \frac{۲n^۳}{۳۰n^۳} = \frac{۳}{۳۰} = \frac{۱}{۱۵}$$

فقط بالاترین درجه
صورت و مخرج را
نوشتیم

ب) حد در بی نهایت($x \to \infty$) برای توابع اصم

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-۱} + ...} \approx \lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{a}\, \left| x + \frac{b}{na} \right|$$

n, a>0 زوج فرمول

مثال ها:

مثال) $$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^۲ + ۱} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{۱}\, \left| x + \frac{۰}{۲} \right| = \lim_{x \to \infty} |x| = \pm\infty$$

مثال) $$\lim_{x \to +\infty} -۲x + ۲ + \sqrt{۴x^۲ - ۴x + ۱} = \lim_{x \to +\infty} -۲x + ۲ + \sqrt{۴}\, \left| x - \frac{۴}{۲x۴} \right| = \lim_{x \to +\infty} -۲x + ۲ + ۲(x - \frac{۱}{۲}) = ۲ - ۱ = ۱$$

مثال) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{5x^2-6}}{2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{5}\,|x|}{2x}=\frac{-\sqrt{5}x}{2x}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

پیوستگی:

تابع $f(x)$ را در نقطه ی $x=a$ پیوسته گویند ، هرگاه در شرایط زیر صدق کند :

(الف) $f(a)$ موجود وعدد حقیقی باشد .

(ب) حد چپ وحد راست در $x=a$ موجود باشند .

(ت) $$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$$

در صورتی که یکی از شرایط بالا برقرار نباشد ، گوئیم تابع در آن نقطه نا پیوسته یا گسسته است .

ودر صورتی که حد چپ با مقدار تابع برابر باشد پیوستگی چپ و در صورتی که حد راست با مقدار تابع برابر باشد پیوستگی راست دارد .

مثال : فرض کنید : $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x<b\\ 1-\frac{1}{4}x & x\ge b\end{cases}$ ، مقدار b راطوری بیابید که تابع در b پیوسته باشد .

$$1-\frac{1}{4}b=\frac{1}{b}\Rightarrow 4b-b^2=4\Rightarrow b^2-4b+4=0$$

وازاینجا $b=2$.

مسایل امتحانی:

)تابع $f(x)=\begin{cases}x^3+1 & x\in q\\ 3x-1 & x\notin q\end{cases}$ در چند نقطه پیوسته است؟

$$x^3+1=3x-1\longrightarrow x^3-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0\longrightarrow X=1,2$$

۲) تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-1}{x-\sqrt{x}} & x>1\\ ax+6-a & x\le 1\end{cases}$ به ازای چه مقدار از a همواره پیوسته است؟

جواب: به ازای جمع مقادیر a پیوسته است.

مجموعه نقاط ناپیوستگی توابع زیر را مشخص کنید:

الف) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۴-x^{۲}} & |x|\le ۲\\ \frac{۱}{۲}x-۱ & |x|>۲\end{cases}$

در نقطه x=2 پیوسته است
اما در نقطه x=-2 پیوستگی راست دارد

ب) $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{۱۶-x^{۲}} & |x|\le ۴\\ x-۴ & |x|>۴\end{cases}$

در نقاط x=4 , x=-4 پیوستگی راست دارد
نقاط ناپیوستگی ندارد چون همه در دامنه اش پیوسته است.

پیوستگی تابع داده شده را در نقطه یا فاصله داده شده بررسی کنید.

۱) $x_{\circ}=۲$, $x_{\circ}=۱$ $\qquad f(x)=x-[x]$

حل) تابع در هر دو عدد صحیح داده شده ناپیوسته است.

۲) $x_{\circ}=۱$ $\qquad f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{|x-۱|}{x-۱} & x\neq ۱\\ \circ & x=۱\end{cases}$

این تابع در $x_{\circ}=۱$ ناپیوسته است چون $f(۱)=۱\neq ۲=\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)$

به ازاء چه مقدار a تابع f با ضـابطه $f(x)=\begin{cases}۲x\cos\dfrac{۱}{x} & , \quad x\neq\circ\\ a & , \quad x=\circ\end{cases}$ در x=0 پیوسته است است.

حل) $\lim\limits_{x\to\circ} f(x)=\lim\limits_{x\to\circ} ۲x\cos\dfrac{۱}{x}=\circ\Rightarrow a=\circ$

) اگر $f(x)=\begin{cases}۲x+ax\ , & x>۲\\ ax^{۲}+۱\ , & x\le ۲\end{cases}$ در R پیوسته باشد مقـدار a را حسـاب کنید.

حل) چون ضابطه ها روی R پیوسته اند کافی است پیوستگی در x=2 بررسی شود.

$$\lim_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۲^{+}}(۲x+ax)=۴+۲a=f(۲)=۴a+۱$$

$$\Rightarrow ۴+۲a=۴a+۱\Rightarrow ۲a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

۱) a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x_\circ = ۴$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} a[x-۲]+b & , \quad x<۴ \\ \left[\dfrac{x}{۳}\right]+b & , \quad x=۴ \\ \dfrac{x^۲-۱۶}{x-۴} & , \quad x>۴ \end{cases}$$

حل)

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x) = \lim_{x\to ۴^+} \frac{x^۲-۱۶}{x-۴} = ۸ = f(۴) = ۱+b$$

$$\lim_{x\to ۴^-} f(x) = \lim_{x\to ۴^-} (a[x-۲]+b) = ۵a+b = f(۴) = ۱+b$$

$$۱+b=۸ \quad \Rightarrow b=۷ \qquad ۵a=۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۵}$$

چند قضیه:

قضیه. اگر تابع $y=f(x)$ اکیداً یکنوا بوده و در نقطهٔ x_0 پیوسته باشد، آنگاه $x=f^{-1}(y)$ در نقطهٔ $y_0=f(x_0)$ پیوسته است.

قضیهٔ بقاء علامت تابع پیوسته. اگر تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=x_0$ پیوسته باشد و $f(x_0)\neq 0$، آنگاه $\varepsilon>0$ ای یافت می‌شود که علامت تابع $y=f(x)$ بر بازهٔ $(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$ تغییر نمی‌کند.

قضیهٔ مقدار میانی. اگر تابع $y=f(x)$ بر بازهٔ بستهٔ $[a;b]$ پیوسته بوده و c عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آنگاه x_0 ای بین a و b وجود دارد که $f(x_0)=c$.

قضیهٔ ریشهٔ اجباری. اگر تابع $y=f(x)$ بر بازهٔ بستهٔ $[a;b]$ پیوسته بوده و $f(a)f(b)<0$، آنگاه $x_0\in(a;b)$ ای وجود دارد که $f(x_0)=0$.

فصل سوم) مشتق

در فصل قبل با توابع پیوسته آشنا شدیم و ملاحظه نمودیم که توابع پیوسته توابعی هستند که دارای این خاصیت هستند که نمودار آنها هیچ جا قطع نشده است و آن را می توان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم نمود مانند توابع $y = |x|$ و $y = x^۲$. حال در این فصل توابع مشتق‌پذیر را معرفی خواهیم کرد. این توابع، توابعی هستند که علاوه بر خاصیت پیوستگی دارای این خاصیت نیز هستند که در هر نقطه از آن می‌توان خط مماس را رسم کرد و البته این خط مماس بر محور x ها عمود نیست. این خاصیت ایجاب می‌کند که نمودار تابع نباید هیچگونه شکستگی، گوشه یا پیچ ناگهانی داشته باشد زیرا در غیر این‌صورت برای این‌گونه نقاط خط مماس وجود ندارد یا در صورت وجود منحصر به فرد نیست

تعریف حدی مشتق:

فرض کنیم تابع $f(x)$ در یک بازه باز حول نقطه تعریف شده باشد ، گوییم $f(x)$ در مشتق پذیر است اگر حد زیر موجود باشد. (بی نهایت نباشد) مقداری معلوم باشد.

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مثال: با استفاده از تعریف ، مشتق تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = ۳x^۲ - ۱$$

$$f(x+h) = ۳(x+h)^۲ - ۱ = ۳(x^۲ + ۲xh + h^۲) - ۱ = ۳x^۲ + ۶xh + ۳h^۲ - ۱$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{۶xh+۳h^۲}{h} = \frac{h(۶x+۳h)}{h} = ۶x + h$$

$$\lim_{h \to ۰}(۶x + ۳h) \to ۶x = f'(x)$$

سوال: مشتق تابع $y = \log_a^x$ را با استفاده از تعریف مشتق بیابید؟

$$\lim_{h\to0}\frac{\log_a^{x+h}-\log_a^x}{h} = \lim_{h\to0}\frac{1}{n}\log_a^{\frac{x+h}{x}} = \lim_{h\to0}(\log_a^{1+\frac{h}{x}})^{\frac{1}{h}} = \log_a(\lim_{h\to0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}) = \log_a^{e^{x^{-1}}} = \frac{1}{x}\log_a^e = \frac{1}{x\ln a}$$

نکته مهم:

تابع $\log$ همواره روی دامنه اش پیوسته است پس $\lim_{x \to a} \log^{f(x)} = \log^{\lim_{x\to a} f(x)}$

مثال:

) با استفاده از تعری مشتق هر یک را در نقطه داده شده حساب کنید.

۱) $f(x) = ۵x^{۲} + x$

$$f'(۱) = \lim \frac{۵x^{۲} + x - ۶}{x - ۱} = \lim \frac{(۵x + ۶) \qquad (x - ۱)}{x - ۱} = ۱۱$$

۲) $x = ۱ \quad , \quad f(x) = \sqrt{x^{۲} + ۵}$

$$f'(۲) = \lim_{x \to ۲} \frac{\sqrt{x^{۲} + ۵} - ۳}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{x^{۲} - ۴}{(x - ۱)\ (\sqrt{x^{۲} + ۵} + ۳)} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

قضیه:

درست مثل مفهوم حد، که حد چپ و حد راست را بصورت تعمیم یافتهٔ آن مطرح می‌کردند، مشتق چپ و مشتق راست را بصورت زیر می‌توان به عنوان تعمیم مشتق تعریف نمود:

$$f'(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

شرط لازم و کافی برای اینکه تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ x_0 مشتقپذیر باشد این است که $y = f(x)$ در نقطهٔ x_0 مشتقپذیر راست و مشتقپذیر چپ بوده و مقدار این دو مشتق برابر $f'(x_0)$ باشد.

مثال:

فرض کنید $h(x) = \begin{cases} f(x) & x \le a \\ g(x) & x \ge a \end{cases}$ به طوری که $f(a) = g(a)$ و مشتق چپ f در نقطه a مساوی مشتق راست g در نقطه a است. ثابت کنید تابع h در نقطه a مشتق‌پذیر است.

حل. کافی است ثابت کنیم مشتق چپ h و مشتق راست h در نقطه a موجود و با یکدیگر برابرند. داریم:

$$f'^{+}(a) = \lim_{x \to a^{+}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^{+}} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'^{+}(a)$$

$$f'^{-}(a) = \lim_{x \to a^{-}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^{-}} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'^{-}(a)$$

چون $g'^{+}(a) = f'^{-}(a)$ لذا $f'^{+}(a) = f'^{-}(a)$ پس f در نقطه a مشتق‌پذیر است.

فرمول های مشتق و مثال ها:

۱) $y = a \to y' = ۰ \quad \to \quad y = ۲ \to y' = ۰$	
۲) $y = ax + b \to y' = a \quad \to \quad y = -۳x + ۷ \to y' = -۳$	
۳) $y = u^{n} \to y' = nu'u^{n-۱} \quad \to \quad y = (۲x - ۳)^{۷} \to y' = ۷(۲)(۲x - ۳)^{۶}$ $y = x^{۷} \to y' = ۷x^{۶}$	
۴) $y = \sqrt{u} \to y' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}} \quad \to \quad y = \sqrt{(۲x^{۲} - ۷)} \to y' = \frac{۴x}{۲\sqrt{۲x^{۲} - ۷}}$	
۵) $y = \sqrt[m]{u^{n}} \to y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}} \quad \to \quad y = \sqrt[۶]{(۲x - ۱)^{۵}} \to y' = \frac{۱۰}{۶\sqrt[۶]{(۲x^{۲} - ۱)^{۱}}}$	
۶) $y = u \times v \to y' = u'v + uv'$ $y = (۲x^{۲} - ۱)(\sqrt{x}) \quad \to \quad y' = (۴x)(\sqrt{x}) + (\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(۲x^{۲} -$	

۷) $y=\frac{u}{v} \to y'=\frac{u'v-v'u}{v^{۲}}$ $y=\frac{(x^{۷}-۶x+۱)}{۲x-۳} \quad \to \quad y'=\frac{(۷x^{۶}-۶)(۲x-۳)-(۲)(x^{۷}-۶x+۱)}{(۲x-۳)^{۲}}$
۸) $y=\sin u \to y'=u'\cos u \quad \to \quad y=\sin ۲x \to y'=۲\cos ۲$
۹) $y=\cos u \to y'=-u'\sin u \quad \to \quad y=\cos\sqrt{x} \to y'=-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$
۱۰) $y=\tan u \to y'=u'(۱+\tan^{۲} u) \to y=\tan(۳x-۱) \to y'=۳(۱+\tan^{۲}(۳x-۱))$
۱۱) $y=\cot u \to y'=-u'(۱+\cot^{۲} u) \to y=\cot ۷x \to y'=-۷(۱+\cot^{۲} ۷x)$
۱۲) $y=e^{u} \to y'=u'e^{u} \quad \to \quad y=e^{۳x^{۲}-۷x+۱} \to y'=(۶x-۷)e^{۳x^{۲}-۷x+۱}$
۱۹) $y=\cot^{-۱} u \to y'=\frac{-u'}{۱+u^{۲}}$
۲۰) $y=\sin^{n} u \to y'=nu'\cos(u)\sin^{n-۱} u \quad \to y=$
$y=\sin^{۷}(۲x+۱) \to y'=۷(۲)\cos(۲x+۱)\sin^{۶}(۲x+۱)$
۲۱) $y=\cos^{n}u \to y'=-nu'\sin u \ \cos^{n-۱} u$ $y=\cos^{۵}\sqrt{x} \to y'=-۵\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\cos^{۴}\sqrt{x}$
۲۲) $y=\tan^{u} n \to y'=nu'(۱+\tan^{۲} u)\tan^{n-۱} u$ $y=\tan^{۳} ۵x \to y'=۱۵(۱+\tan^{۲} u)\tan^{۲} ۵x$
۲۳) $y=\cot^{n} u \to y'=-nu(۱+\cot^{۲} u)\cot^{n-۱} u$ $y=\cot^{۳} ۲x \to y'=-۶(۱+\cot^{۲} u)\cot^{۲} ۲x$

۱۳) $y=a^u \to y'=u'a^u \ln a \quad \to \quad y=۳^{۲x^۲-۱} \to y'=۴x(۳)^{۲x^۲-۱} Ln\ ۳$	
۱۴) $y=\ln u \to y'=\frac{u'}{u} \quad \to \quad y=\ln(۳x^۳-۲۷x) \quad \to \quad y'=\frac{۹x^۲-۲۷}{۳x^۳-۲۷x}$	
۱۵) $y=\log_a^u \to y'=\frac{u'}{u\ln a} \quad \to \quad y=\log_۵^{۳x^۲-۶x} \to y'=\frac{۶x-۶}{(۳x^۲-۶x)\ln ۵}$	
۱۶) $y=\sin^{-۱} u \to y'=\frac{u'}{\sqrt{۱-u^۲}} \quad \to \quad y=\sin^{-۱} ۲x \to y'=\frac{۲}{\sqrt{۱-۴x^۲}}$	
۱۷) $y=\cos^{-۱} u \to y'=\frac{-u}{\sqrt{۱-u^۲}} \quad \to \quad y=\cos^{-۱} ۷x \to y'=\frac{-۷}{\sqrt{۱-۴۹x}}$	
۱۸) $y=\tan^{-۱} u \to y'=\frac{u'}{۱+u^۲} \quad \to \quad y=\tan^{-۱}(x^۲+۱) \to y'=\frac{۲x}{۱+(x^۲+۱)^۲}$	

مشتق عباراتی که برحسب x توان دارند را بدست آورید .

مثال(۱) : $y=x^x$

در چند مرحله انجام میدهیم ابتدا از طرفین Ln می گیریم و....

(۱) $\ln y = \ln x^x$

(۲) $\ln y = x \ln x$

(۳) $\frac{y'}{y} = (۱\times \ln x + \frac{۱}{x}\times x) \to \frac{y'}{y} = (\ln x + ۱)$

(۴) $y' = y(\ln x + ۱)$

(۵) $y' = x^x(\ln x + ۱)$

مشتق تابع مرکب:

قضیه فرض کنیم تابع f در نقطه $g(a)$ و تابع g در نقطه a مشتق‌پذیر باشند در این صورت تابع $f\circ g$ در نقطه a مشتق‌پذیر است و داریم

$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))g'(a)$$

نتیجه

الف) فرض کنید $y=f(u)$ و $u=g(x)$ در این صورت:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

ب) در حالت کلی می‌توان از فرمول مشتق تابع مرکب به تعداد لازم استفاده نمود که آن را قاعده زنجیری می‌نامیم. به طور مثال اگر داشته باشیم.

$$Y=f(u),\quad u=g(v),\quad v=h(w),\quad w=k(x)$$

آنگاه داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx}.$$

اصطلاح زنجیری بدین جهت است که سمت چپ همانند حلقه‌های زنجیری است که حلقه اول آن dy و حلقه آخر آن dx است و وجود حلقه‌های بین این دو حلقه استفاده از مشتق ترکیب توابع را برای متغیرهای جدید مشخص می‌سازد. قاعده زنجیری گاهی محاسبات را بسیار ساده می‌سازد و به علاوه احتمال اشتباه در محاسبات را به مراتب کاهش می‌دهد.

مثال ها:

مشتق هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

الف)

$$y=\sqrt{۱+\sqrt{x}}$$

ب)

$$y=\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{x}}}}$$

ج)

$$y=\sin(۱+\cos\sqrt{۱+x^{۲}})$$

حل.

الف) قرار می‌دهیم $u = ۱ + \sqrt{x}$ پس $y = \sqrt{u}$ در این صورت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{۱}{۲\sqrt{u}}\frac{۱}{۲\sqrt{x}} = \frac{۱}{۴\sqrt{۱+\sqrt{x}}\sqrt{x}} = \frac{۱}{۴\sqrt{x(۱+\sqrt{x})}}$$

ب) قرار می‌دهیم $y = \sqrt{u}$ و $u = ۱ + \sqrt{v}$ و $v = ۱ + \sqrt{w}$ و $w = ۱ + \sqrt{x}$ در این صورت داریم.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx}\\ &= \frac{۱}{۲\sqrt{u}}\frac{۱}{۲\sqrt{v}}\frac{۱}{۲\sqrt{w}}\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\\ &= \frac{۱}{۱۶\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{x}}}}\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{x}}}}\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{x}}}\sqrt{x}}\end{aligned}$$

ج) فرض کنیم $y = \sin u$, $u = ۱ + \cos v$ و $v = \sqrt{۱ + x^۲}$ در این صورت

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}\\ &= (\cos u)(-\sin v)\left(\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}\right)\\ &= \frac{x\sin\sqrt{۱+x^۲}\cos(۱+\cos\sqrt{۱+x^۲})}{\sqrt{۱+x^۲}}\end{aligned}$$

مشتق تابع معکوس:

قضیه (مشتق تابع معکوس). *فرض کنیم f تابعی مشتق پذیر و یک به یک باشد و $(f'(f^{-۱}(x))) \neq ۰$ به ازای هر $x \in D_{f^{-۱}}$ در این صورت $f^{-۱}$ نیز مشتق‌پذیر است و داریم.*

$$(f^{-۱})'(x) = \frac{۱}{f'(f^{-۱}(x))}$$

مثال فرض کنید $y = \sin^{-1} x$ در این صورت $x = \sin y$ و با مشتق‌گیری از طرفین رابطه نسبت به x داریم

$$\begin{aligned} 1 = y' \cos y \Rightarrow y' &= \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

بنابراین
به طور مستقیم نیز می‌توان به کمک قضیه مشتق تابع معکوس فوق را بدست آورد.

$$y' = (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

مشتق مراتب بالاتر:

قبلا دیدیم که مشتق تابع $y = x^3$ تابع $y' = 3x^2$ می‌باشد که این خود تابعی مشتق‌پذیر است و می‌توانیم مجددا از این تابع مشتق بگیریم با انجام این فرایند مشتقات مرتبه دوم و سوم و بالاتر حاصل می‌شود. همان طور که در قبل ملاحظه نمودیم برای مشتق تابع $y = f(x)$ از نماد $f'(x)$ یا y' استفاده می‌کردیم و برای مشتقات بالاتر یعنی مشتق مرتبه دوم می‌توان از نماد $f''(x)$ یا y'' و مشتق مرتبه سوم از نماد $f'''(x)$ یا y''' و به همین ترتیب برای مشتق مرتبه nام از نماد $f^{(n)}(x)$ یا $y^{(n)}$ استفاده نموده البته چنانچه از نماد $\frac{dy}{dx}$ برای مشتق مرتبه اول استفاده نماییم برای مشتق مرتبه دوم نماد $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$ و برای مرتبه سوم نماد $\frac{d^3y}{dx^3}$ و برای مشتق nام از نماد $\frac{d^ny}{dx^n}$ می‌توان استفاده نمود.
حال به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱:

مشتق دوم عبارت زیر را بدست آورید.

$$Y = (x + x^2 \sin x)^2$$

حل. داریم

$$Y' = 2(1 + 2x\sin x + x^2\cos x)(x + x^2\sin x)$$

بنابراین با یک بار دیگر مشتق‌گیری داریم.

$$\begin{aligned}Y'' &= 2(2\sin x + 2x\cos x + 2x\cos x - x^2\sin x)(x + x^2\sin x)\\ &\quad + 2(1 + 2x\sin x + x^2\cos x)(1 + 2x\sin x + x^2\cos x)\\ &= 2(2\sin x + 4x\cos x - x^2\sin x)(x + x^2\sin x) + (1 + 2x\sin x + x^2\cos x)^2\end{aligned}$$

مثال *مشتق nام هر یک از توابع زیر را بر حسب n به دست آورید.*

الف) $y = \sin x$

ب) $y = \frac{1}{x}$

ج) $y = \cos x$

حل. برای حل (الف) داریم

$$\begin{aligned}y = \sin x \Rightarrow y' &= \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})\\ \Rightarrow y'' &= -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin(x + \frac{2\pi}{2})\\ \Rightarrow y''' &= -\cos x = \sin(x + \frac{3\pi}{2})\\ \Rightarrow y^{(4)} &= \sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + \frac{4\pi}{2})\end{aligned}$$

بنابراین

$$y^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$$

برای حل (ب) داریم

$$\begin{aligned}y = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow y' &= (-1)x^{-2}\\ \Rightarrow y'' &= 1.2.x^{-3}\\ \Rightarrow y''' &= -1.2.3.x^{-4}\end{aligned}$$

بنابراین

$$y^{(n)} = (-۱)^n n!\, x^{-n-۱} = \frac{(-۱)^n n!}{x^{n+۱}}$$

برای قسمت (ج) مشابه قسمت الف به سادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$y^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{۲})$$

مشتق گیری ضمنی:

توابعی که تاکنون دیده‌ایم با بیان صریح یک متغیر بر حسب متغیر دیگر بیان شده بودند یعنی به صورت $y = f(x)$ با این حال بعضی توابع به طور ضمنی توسط رابطه‌ای بین x و y مانند $x^۲ + y^۳ - ۲xy = ۰$ یا $x^۳ + y^۳ = ۶xy^۲$ تعریف می‌شوند و گاهی ممکن است چنین رابطه هایی قابل حل برای بدست آوردن y به عنوان یک یا چند تابع صریح از x نباشد لذا محاسبه y' پس از محاسبه y دشوار خواهد بود در این قسمت به نحوه محاسبه y' بدون محاسبه y خواهیم پرداخت.

تعریف *فرض کنیم y تابعی از x بوده و داشته باشیم $f(x,y) = ۰$ در این صورت تابع f را یک تابع ضمنی از متغیرهای x و y می‌نامیم.*
محاسبه y' از تابع ضمنی $f(x,y) = ۰$ را مشتق‌گیری ضمنی می‌گوییم و نحوه محاسبه y' بدین صورت است که از طرفین معادله باید نسبت به x مشتق بگیریم. سپس معادله حاصل که در آن y' وجود دارد را حل کرده و y' را از آن به دست می‌آوریم و بنابراین مقدار y' بر حسب x و y حاصل می‌شود.

سوال: مشتق عبارات زیر را بدست آورید؟

$$y^3-3xy+x^3=0$$

$$3\frac{dy}{dx}y^2-3(y+x\frac{dy}{dx})+3x^2=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}(y^2-x)=-x^2+y\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-x^2+y}{y^2-x}$$

مشتق توابع پارامتری. فرض کنید $y=f(x)$ تابعی از x باشد که به صورت $x=\phi(t)$ و $y=\psi(t)$ مطرح شده است. اگر ϕ و ψ در $t=t_0$ مشتق‌پذیر باشند، $x_0=\phi(t_0)$، $y_0=\psi(t_0)$، در این صورت $y=f(x)$ نسبت به x در نقطهٔ $x=x_0$ مشتق‌پذیر است و بعلاوه

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\frac{\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}}{\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}}=\frac{\psi'(t_0)}{\phi'(t_0)}$$

مثال. اگر $x=\sin(2t)$ و $y=2\sin t$، آنگاه

$$y'=\frac{(2\sin t)'}{(\sin(2t))'}=\frac{2\cos t}{2\cos(2t)}=\frac{\cos t}{\cos(2t)}$$

مثال. اگر $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$ و $y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$، آنگاه

$$\begin{aligned}y' &= \frac{\left(\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}\right)'}{\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}\right)'}=\frac{\frac{1}{2}(1-\sqrt[3]{t})'(1-\sqrt[3]{t})^{-1/2}}{\frac{1}{3}(1-\sqrt{t})'(1-\sqrt{t})^{-2/3}}\\ &= \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{3}t^{-2/3})(1-\sqrt[3]{t})^{-1/2}}{\frac{1}{3}(-\frac{1}{2}t^{-1/2})(1-\sqrt{t})^{-2/3}}=\left(\frac{1-\sqrt{t}}{t}\right)^{2/3}\left(\frac{t}{1-\sqrt[3]{t}}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

مثال:

منحنی پارامتری با معادلات $\begin{cases}x=t\cos t-۱\\ y=t\sin t+۱\end{cases}$ *مفروض است. نقطه‌ای روی این منحنی بیابید که شیب خط مماس در این نقطه صفر باشد.*

حل. با توجه به مشتق پارامتری داریم:

$$y'=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}$$

حال اگر $y'=۰$ آنگاه باید داشته باشیم $\sin t+t\cos t=۰$ و این به ازای $t=۰$ برقرار است لذا نقطه مورد نظر عبارت است از $(-۱,۱)$.

دستور لایبنیتز. در صورتی که توابع $u(x)$ و $v(x)$ مشتق مرتبهٔ n ام داشته باشند، آنگاه

$$(vu)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$$

مثال. در صورتی که $y=x^3\ln x$، با فرض $u=x^3$ و $v=\ln x$، داریم

$$\begin{aligned}
y^{(4)} &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(x^3)^{(4)}(\ln x)^{(4-k)}\\
&= \binom{4}{0}(x^3)^{(0)}(\ln x)^{(4)}+\binom{4}{1}(x^3)^{(1)}(\ln x)^{(3)}+\binom{4}{2}(x^3)^{(2)}(\ln x)^{(2)}\\
&\quad+\binom{4}{3}(x^3)^{(3)}(\ln x)^{(1)}+\binom{4}{4}(x^3)^{(4)}(\ln x)^{(0)}\\
&= (1)(x^3)\left(\frac{-6}{x^4}\right)+(4)(3x^2)\left(\frac{2}{x^3}\right)\\
&\quad+(6)(6x)\left(\frac{-1}{x^2}\right)+(4)(6)\left(\frac{1}{x}\right)+(1)(0)(\ln x)=\frac{6}{x}
\end{aligned}$$

مثال در صورتی که $y=e^{2x}\cos x$، با فرض $u=e^{2x}$ و $v=\cos x$، داریم

$$\begin{aligned}
y^{(5)} &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(e^{2x})^{(k)}(\cos x)^{(5-k)}\\
&= \binom{5}{0}(e^{2x})^{(0)}(\cos x)^{(5)}+\binom{5}{1}(e^{2x})^{(1)}(\cos x)^{(4)}+\binom{5}{2}(e^{2x})^{(2)}(\cos x)^{(3)}\\
&\quad+\binom{5}{3}(e^{2x})^{(3)}(\cos x)^{(2)}+\binom{5}{4}(e^{2x})^{(4)}(\cos x)^{(1)}+\binom{5}{5}(e^{2x})^{(5)}(\cos x)^{(0)}\\
&= (1)(e^{2x})(-\sin x)+(5)(2e^{2x})(\cos x)+(10)(4e^{2x})(\sin x)+(10)(8e^{2x})(-\cos x)\\
&\quad+(5)(16e^{2x})(-\sin x)+(1)(32e^{2x})(\cos x)\\
&= -41e^{2x}\sin x-38e^{2x}\cos x
\end{aligned}$$

دیفرانسیل تابع:

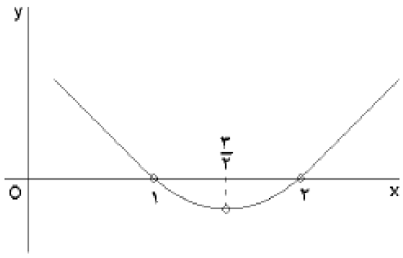
تعریف. فرض کنید $y = f(x)$ در $x = x_0$ مشتق‌پذیر است، در این صورت می‌گوئیم تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ دیفرانسیل پذیر است و دیفرانسیل آن در نقطهٔ $x = x_0$ را به صورت $df|_{x_0} = f'(x_0)dx$ تعریف می‌کنیم، که

$$dx = \triangle x = x - x_0$$

بنابراین df تابعی دو متغیره است:

$$df : (x, x_0) \mapsto f'(x_0)(x - x_0)$$

تعبیر هندسی. اگر خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ را رسم نموده و در امتداد آن حرکت کنیم، به یک مقدار تقریبی برای $y = f(x)$ می‌رسیم: $f(x) \approx f(x_0) + df|_{x_0}$. یعنی، $df|_{x_0}$ میزان صعود بر خط مماس بر تابع است، هنگامی که متغیر از x_0 به اندازهٔ Δx تغییر می‌کند. به شکل ۱ توجه شود.



(الف)

شکل ۱ : تعبیر هندسی دیفرانسیل

قضیه. اگر $y = f(x)$ و $y = g(x)$ مشتق‌پذیر باشند، در این صورت

1) $d(af) = adf,$

2) $d(f \pm g) = df \pm dg,$

3) $d(fg) = gdf + fdg,$

4) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}(gdf - fdg),$

5) $d(f(g)) = f'(g)dg.$

مثال : مقدار تقریبی $\sqrt[5]{37}$ را بدست آورید .

$$f(x+\Delta x)=\sqrt[5]{37}$$

$$f(x)=\sqrt[5]{x}\rightarrow f'(x)=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}=$$

$$\frac{1}{5\sqrt[5]{(2^5)^4}}=\frac{1}{5\sqrt[5]{(2^4)^5}}=\frac{1}{80}$$

$$2^5<37<3^5$$

$$x=32 \qquad \rightarrow \Delta x=5$$

$$x+\Delta x=37$$

$$\sqrt[5]{37}=f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x).dx$$

$$=\sqrt[5]{2^5}+\frac{1}{80}\times 5\approx 2/6$$

فصل چهارم) کاربردهای مشتق:

قضیه: اگر تابع f در فاصله $I \in D_f$ پیوسته و مشتق پذیر باشد و اگر در این فاصله صعودی باشد، آنگاه

$$\forall x \in I \Rightarrow f'(x) > 0$$

و اگر تابع در این فاصله نزولی باشد، آنگاه

$$\forall x \in I \Rightarrow f'(x) < 0$$

مثال: تابع $f(x) = x^3 - x + 2$ را در نظر بگیرید:

$D_f = \mathbb{R} \Rightarrow$ پیوسته و مشتق پذیر است.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	
$f'(x)$	+		−	+
	↗		↘	↗

نقاط اکسترمم نسبی:

تابع f در نقطه x_0 دارای ماکزیمم نسبی است، اگر یک همسایگی از x_0 وجود داشته باشد که برای تمام xهای متعلق به این همسایگی داشته باشیم:

$$f(x_0) \geq f(x) \ \ \ni \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

تابع f در نقطه x_0 دارای می نیمم نسبی است، اگر یک همسایگی از x_0 وجود داشته باشد که برای تمام xهای متعلق به این همسایگی داشته باشیم:

$$\exists \delta > 0 \ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$

قضیه: فرض کنیم تابع y=f(x) در نقطه x_0 و در همسایگی آن پیوسته بوده و تابع در نقطه x_0 مشتق پذیر نیز باشد. اگر x_0 یک اکسترمم نسبی باشد، آنگاه $f'(x_0) = 0$ است.

مثال: نقاط اکسترمم تابع $y = x^۳ - ۳x^۲ + ۶$ را بدست آورید.

$$y' = ۳x^۲ - ۶x = ۰ \rightarrow ۳x(x-۲) = ۰ \begin{cases} ۳x = ۰ \rightarrow x = ۰ \\ x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۲ \end{cases}$$

$x = ۲ \rightarrow y = ۸ - ۱۲ + ۶ = ۲$ Min(2,2) $x = ۰ \rightarrow y = ۰ - ۰ + ۶ = ۶$ Max(0,6)

مثال: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $y=۲ax^{۳}-۴bx$ در نقطه $A\begin{vmatrix}۱\\۲\end{vmatrix}$ دارای اکسترمم باشد.

حل: مختصات نقطه A در تابع صدق می کند بنابراین :

$$۲=۲a(۱)^{۳}-۴b(۱)$$
$$۲=۲a-۴b \qquad 1$$

از طرفی مشتق به ازای طول نقطه اکسترمم مساوی صفر است بنابر این :

$$y'=۶ax^{۲}-۴b \xrightarrow{x=۱} ۶a-۴b=۰ \qquad 2$$

۱ و ۲ را در یک دستگاه حل می کنیم :

$$\begin{cases}۲a-۴b=۲\\ ۶a-۴b=۰\end{cases} \qquad a=-\frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad b=\frac{-۳}{۴}$$

قضیه رول:

فرض کنیم، تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته و در نقاط (a,b) مشتق پذیر باشد، اگر $f(a)=f(b)$ باشد، نقطه $c\in(a,b)$ به طوری که $f'(c)=0$

تعمیم قضیه رول(قضیه مقدار میانگین برای مشتق)

فرض کنیم شرایط قضیه رول برای تابع f برقرار باشد(به غیر از $f(a)=f(b)$) در این صورت:

$$\exists c\in(a,b) \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

مثال: نشان دهید تابع $y=x^{2k+1}+Px+q=0$ با شرط $k\geq 0$ و $P>0$ دقیقاً یک ریشه دارد؟

$$f(x)=x^{2k+1}+Px+q \qquad D_f=\mathbb{R} \ , \ f(-\infty)<0 \ , \ f(+\infty)>0$$

برهان خلف: فرض کنیم تابع f دو ریشه دارد به طوری که $x_1<x_2$ باشد، آنگاه در بازه $[x_1,x_2]$ داریم:

$$f(x_1)=f(x_2)=0\Rightarrow f'(x)=(2k+1)x^{2k}+P>0$$

معادله $f'(x)$ هیچ ریشه ای ندارد پس x_2 ای وجود ندارد و تابع فقط یک ریشه دارد.

قضیه کوشی(تعمیم قضیه مقدار میانگین):

فرض کنیم توابع f و g در فاصله (a,b) مشتق پذیر باشد و هم چنین بازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم، $g'(x) \neq 0$ آنگاه نقطه‌ای مانند $z \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$ باشد. (به شرط این که $g(b) \neq g(a)$)

سوال: با استفاده از قضیه کشی ثابت کنید: $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x \quad (x > 0)$

$$f(t) = \ln(t+1)$$

$$b = x_1 \qquad a = 0$$

$$g(t) = t$$

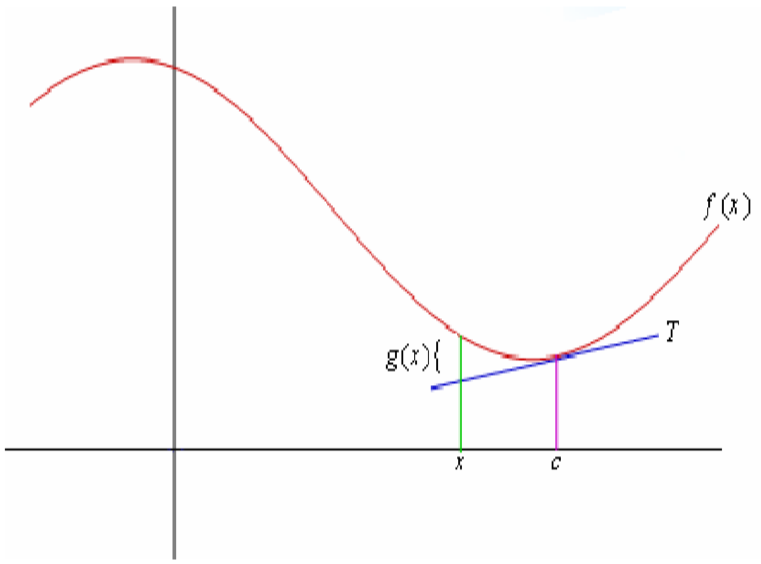
$$\frac{\ln(x+1) - \ln(1)}{x+1-1} = \frac{\frac{1}{z+1}}{1} \Rightarrow \ln(x+1) = \frac{x}{z+1} \qquad 0 < z < x$$

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x}{z+1} < \frac{x}{0+1} \Rightarrow \frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$$

تقعر منحنی و نقطه عطف:

تابع y=f(x) در نقطه x=c دارای تقعر رو به بالاست (تقعر مثبت): اگر در نقطه c، مشتق تابع در این نقطه و یک همسایگی آن موجود باشد، به طوری که نمودار f بالای خط مماس بر منحنی در این نقطه باشد.

تابع محدب: هر خط مماس بر منحنی که رسم کنیم، منحنی یا نمودار در بالای آن خط مماس باشد.



قضیه: فرض کنیم تابع f در نقطه c و همسایگی آن دارای مشتق باشد، تابع در نقطه (c,f(c)) دارای تقعر مثبت است، اگر $f''(c)>0$ و اگر $f''(c)<0$ باشد، تابع دارای تقعر منفی است. (در تقعر مثبت در همسایگی $g(x)>0$ و در تقعر منفی در همسایگی $g(x)<0$)

مثال. مشخص کنید که تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در کدام نقاط محدب و در کدام نقاط مقعر است.

توجه داریم که $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ و بعلاوه $f''(x)=\frac{2}{x^3}$. پس چون $y=f''(x)$ بر $(0;+\infty)$ مثبت است، بنابراین $y=f(x)$ بر این بازه مقعر می‌باشد و چون $y=f''(x)$ بر بازهٔ $(-\infty;0)$ منفی است، بنابراین $y=f(x)$ بر این بازه محدب می‌باشد.

نقطه عطف:

نقطه ای از منحنی تابع است که در آن جهت تقعر تابع عوض می شود.

تعیین اکسترمم های نسبی به کمک مشتق دوم:

فرض کنیم تابع f تابعی باشد که x=c یک نقطه بحرانی برای آن است و هم چنین فرض کنیم f' در یک همسایگی c تعریف شده باشد، در این صورت f(c) ماکزیمم نسبی است. اگر $f''(c)<0$ باشد و $f(c)$ می نیمم نسبی است، اگر $f''(c)>0$ باشد.

اگر $f''(c)=0$ باشد، از مشتق دوم برای تعیین ماکزیمم و می نیمم نسبی نمی توان استفاده کرد.

مثال:

با استفاده از آزمون مشتق دوم نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۴$$

$$f'(x)=۳x^{۲}-۶x=۰\Rightarrow x=۰, x=۲$$

$$x=۰\Rightarrow f''(۰)=-۶\Rightarrow$$ ماکزیمم نسبی

$$x=۲\Rightarrow f''(۲)=۶\Rightarrow$$ مینیمم نسبی

$$f(x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x+\cos x$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\sin x=\circ \Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴}$$

$$f''(x)=-\cos x$$

$$x=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow f''(\frac{\pi}{۴})-\cos(\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow$$ ماکزیمم نسبی

$$x=\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow f''(\frac{۳\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow$$ مینیمم نسبی

به دست آوردن معادلات خط مماس و قائم بر منحنی:

نکته: مشتق به ازای طول نقطه مماس می شود ضریب زاویه خط مماس

اگر نقطه A(a,b) نقطه مماس باشد آنگاه داریم :

شیب خط مماس $f'(a)=m$

معادله خط مماس $y-b=m(x-a)$

معادله خط قائم $y-b=-\frac{۱}{m}(x-a)$

برخی کاربردهای دیگر:

قضیه هوپیتال:

فرض کنیم تابع f و g در یک همسایگی از c مشتق پذیر باشد (احتمالاً غیر از خود c)، اگر $g'(x)\neq 0$ باشد، بازای $x\neq c$ و اگر $\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)=0$ یا $\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)=\infty$ باشد، آنگاه $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

مثال۱.

$$\lim_{x\to -۱}\frac{x^{۳}+۱}{x+۱}=\frac{-۱^{۳}+۱}{-۱+۱}=\frac{۰}{۰}\qquad \lim_{x\to -۱}\frac{۳x^{۲}}{۱}=۳$$

مثال۲.

$$\lim_{x \to ۰} \frac{Cosx - ۱}{x^۲} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x \to ۰} \frac{-Sinx}{۲x} = \frac{-۱}{۲} \lim_{x \to ۰} \frac{Sinx}{x} = \frac{-۱}{۲} \times ۱ = \frac{-۱}{۲}$$

مثال۳.

$$\lim_{x \to \pi} (۱ - Sin\frac{x}{۲}) \tan\frac{۳x}{۲} = ۰ \times \infty$$

$$\frac{\text{عامل صفر}}{\frac{۱}{\text{عامل بی نهایت}}}$$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{۱ - Sin\frac{x}{۲}}{\frac{۱}{\tan\frac{۳x}{۲}}} = \lim_{x \to \pi} \frac{۱ - Sin\frac{x}{۲}}{Cot\frac{۳x}{۲}} = \frac{۰}{۰}$$

هوپیتال : $$\lim_{x \to \pi} \frac{-\frac{۱}{۲} Cos\frac{x}{۲}}{-(۱ + Cot^۲\frac{۳x}{۲})} = \frac{۰}{-۱} = ۰$$

مسایل کاربردی کمینه و بیشنیه(بهینه سازی):

روش‌هایی که برای یافتن مقادیر اکسترمم در این فصل آموخته‌ایم در بسیاری از مسائل روزمره کاربردهای عملی دارند.

یک کاسب می‌خواهد مخارج را کمینه و سود را بیشینه کند. اصل فرما در نورشناسی بیان می‌دارد که نور از مسیری عبور می‌کند که کمترین زمان را داشته باشد. در اینجا مسائلی مانند بیشینه کردن مساحت‌ها و حجم‌ها و سودها و کمینه کردن فاصله‌ها و زمان‌ها و هزینه‌ها را حل خواهیم کرد.

در حل چنین مسائل علمی غالبا بزرگ‌ترین مشکل تغییر مساله مورد بحث به مساله‌ای بیشینه-کمینه و تعیین تابعی است که باید کمینه یا بیشینه گردد.

مراحل حل مسایل کاربردی کمینه و بیشینه:

۱. فهمیدن مسئله.

اولین مرحله خواندن دقیق مسئله است تا وقتی که به وضوح فهمیده شود. از خودتان بپرسید: چه چیزی نامعلوم است؟ چه چیزهایی کمیت‌های داده شده‌اند؟ شرایط داده شده چه هستند؟

۲. رسم نمودار.

در بیشترین مسائل رسم نمودار و مشخص کردن کمیت‌های داده شده و مورد نیاز بر روی نمودار مفید واقع می‌شود.

۳. معرفی نماد.

به کمیتی که قرار است کمینه یا بیشینه شود نمادی اختصاص دهید (اجازه دهید درحال حاضر آن را با Q نشان دهیم). همچنین نمادهای $a, b, c, \cdots, x, y$ را برای کمیت‌های نامعلوم دیگر انتخاب نموده و نمودار را با این نمادها مشخص کنید. استفاده از مخفف‌ها به عنوان نمادهایی مثل A برای مساحت و h برای ارتفاع و t برای زمان ممکن است مفید واقع شوند.

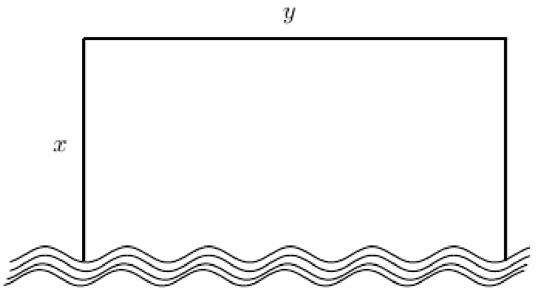
۴. Q را بر حسب بعضی از نمادهای دیگر مرحله‌ی ۳ بیان نمائید.

۵. اگر در مرحله‌ی ۴، Q به عنوان تابعی از بیش از یک متغیر بیان شده باشد اطلاعات داده شده را برای یافتن روابط بین این متغیرها به صورت معادلات استفاده کنید. سپس این معادلات را برای حذف تمام بجز یکی از این متغیرها در عبارت Q استفاده نمائید. دراین صورت Q به عنوان تابعی ازیک متغیر x مثلا $Q = f(x)$ داده می‌شود. قلمرو این تابع را بنویسید.

۶. روش‌های فصل هفتم را برای یافتن مقادیر بیشینه یا کمینه مطلق f بکار برید.

مثال *کشاورزی ۲۴۰۰ متر حصارکشی دارد و می‌خواهد مزرعه‌ای مستطیلی شکل را که کنار رودخانه‌ی مستقیمی قرار دارد حصاربندی کند. در امتداد رودخانه حصار لازم ندارد. ابعاد مزرعه‌ای که بیشترین مساحت را در بر می‌گیرد چقدر است؟*

حل. ابتدا نموداری رسم می‌کنیم. می‌خواهیم مساحت A از این مستطیل را بیشینه کنیم. فرض کنید که



x و y عرض و طول این مستطیل (بر حسب متر) باشند. سپس A را بر حسب x و y بیان می‌کنیم:

$$A = xy$$

می‌خواهیم A را به عنوان تابعی از یک متغیر بیان کنیم. پس با بیان y بر حسب x، y را حذف می‌نمائیم. برای انجام این امر اطلاع معلوم طول کل حصار را که ۲۴۰۰ متر است به کار می‌گیریم. پس $2x + y = 2400$ از این معادله داریم $y = 2400 - 2x$ که به دست می‌دهد

$$A = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

توجه کنید که $x \geq 0$ و $x \leq 1200$ (در غیر این صورت $A < 0$). در نتیجه تابعی که می‌خواهیم آن را بیشینه کنیم عبارت است از

$$A(x) = 2400x - 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 1200$$

برای یافتن اعداد بحرانی معادله‌ی $A'(x) = 2400 - 4x = 0$ را حل می‌کنیم که جواب می‌دهد $x = 600$.

مقدار بیشینه‌ی A باید در این عدد بحرانی و یا در یک نقطه‌ی انتهائی این درونه رخ دهد. چون $A(0) = 0$ و $A(600) = 720000$ و $A(1200) = 0$ با توجه به مراحلی که گفته شد نتیجه می‌دهد که مقدار بیشینه $A(600) = 7200$ می‌باشد.

(به طور معادل با مشاهده‌ی این‌که $A''(x) = -4 < 0$ برای هر x می‌توانستیم ببینیم که A همیشه به پائین مقعر بوده و بیشینه‌ی موضعی در $x = 600$ باید یک بیشینه‌ی مطلق باشد).

بنابراین مزرعه مستطیلی باید دارای عرض ۶۰۰ متر و طول ۱۲۰۰ متر باشد.

مثال *نقطه‌ای بر سهمی $y^2 = 2x$ بیابید که به نقطه‌ی $(1, 4)$ نزدیک‌ترین باشد.*

حل. فاصله‌ی بین نقطه‌ی $(1, 4)$ و نقطه‌ی (x, y) برابر است با $d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^4}$.
لیکن اگر (x, y) بر سهمی قرار داشته باشد آنگاه $x = \frac{y^2}{2}$. در نتیجه عبارت d می‌شود

$$d = \sqrt{(\frac{y^2}{2} - 1)^2 + (y-4)^4}$$

(به طور متناوب می‌توانستیم با جایگذاری $y = \sqrt{2x}$ برای بدست آوردن d بر حسب x تنها استفاده کنیم.)
به جای کمینه کردن d مربع آن را کمینه می‌کنیم $d^2 = f(y) = (\frac{y^2}{2} - 1)^2 + (y-4)^2$. (توجه نمایید که کمینه‌ی d و d^2 یکسانند، لیکن کار کردن با d^2 آسان‌تر است) با مشتق‌گیری بدست می‌آوریم.

$$f'(y) = 2(\frac{y^2}{2}) = 2(y-4) = y^3 - 8$$

پس $f'(y) = 0$ وقتی که $y = 2$. مشاهده می‌کنیم که $f'(y) < 0$ وقتی که $y < 2$ و $f'(y) > 0$ وقتی که $y > 2$ در نتیجه کمینه‌ی مطلق وقتی رخ می‌دهد که $y = 2$. مقدار متناظر x برابر است با $x = \frac{y^2}{2} = 2$ است. بنابراین نقطه‌ی $(2, 2)$ نزدیک‌ترین نقطه به $(1, 4)$ بر $y^2 = 2x$ می‌باشد.

فصل پنجم) انتگرال

در بخش قبل مسأله مشتق مطرح شد. متأسفانه به همان اندازه که مشتقگیری موفق است، انتگرالگیری سخت و معمولاً ناموفق است! زیرا این مسأله نمونه‌ای از مسایل معادلات دیفرانسیل است ($y' = f(x)$)، به همین دلیل حتی در صورت اطمینان از وجود جواب، یافتن آن ممکن است محال باشد! مثلاً، با اینکه می‌دانیم تابع $y = \sin x/x$ دارای تابع اولیه است، ولی هیچ تابع مقدماتی‌ای مشتق آن برابر $\sin x/x$ شود را نمی‌شناسیم.

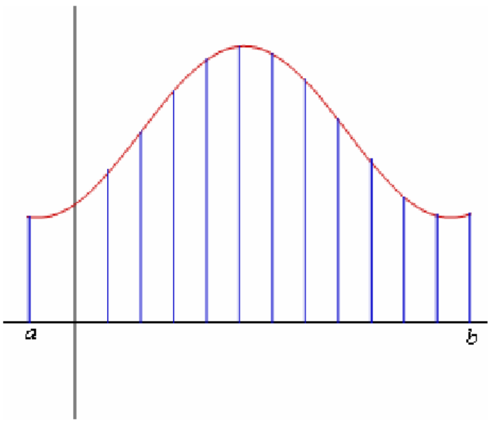
حل مسأله انتگرالگیری به روش بازگشت به مشتق است. یعنی، از اطلاعات قبلی استفاده کرده و اطلاعاتی راجع به انتگرال بدست می‌آوریم. این کار با طرح یک جدول از فرمولهای پایه و تعدادی قضیه که توابع پیچیده را بر حسب توابع ساده‌تر توضیح می‌دهند، انجام می‌پذیرد.

مفهوم انتگرال:

فرض کنیم تابع f در فاصله $[a,b]$ تعریف شده باشد، بازه $[a,b]$ را به n قسمت تقسیم می کنیم. (n قسمت لزوماً مساوی نیتند.) [با انتخاب $n-1$ نقطه دلخواه در فاصله $[a,b]$] که آن را یک افراز از آن می نامیم. $P=\{x_0,\dots,x_n\}$.

طول هر زیر فاصله را Δx می نامیم، یعنی فاصله $[x_{i-1},x_i]$ را $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ تعریف می کنیم.

طول بزرگترین مقدار Δx_i را طول (طول بزرگترین زیر فاصله) نرم افراز گوییم و با علامت $\|\Delta\|$ نشان می دهیم.



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

$$[x_0,x_1]\ ,\ [x_1<x_2]\ ,\ \cdots\ ,\ [x_{n-1},x_n] \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\|\Delta\| = \max\{\Delta x_i\}$$

اگر فرض کنیم تابع f صعودی باشد، آنگاه $f(x_i) > f(x_{i-1})$ خواهد بود، بنابراین مساحت مستطیل بزرگتر از زیر فاصله i ام $\Delta x_i f(x_i)$ و مستطیل کوچکتر $\Delta x_i f(x_{i-1})$ خواهد بود. اگر مجموع مساحت مستطیل های بزرگتر و کوچکتر را حساب کنیم، واضح است که مساحت زیر منحنی $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ مابین این دو مساحت خواهد بود.

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(x_{i-1})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(x_{i-1}) \le S \le \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(x_i)$$

حال اگر تعداد زیر فاصله ها را افزایش دهیم مساحت مستطیل های کوچکتر و بزرگتر به هم دیگر نزدیک خواهند بود و در حالت حدی وقتی $n \to \infty$ میل می کند، این دو مساحت با هم دیگر برابر می شوند، در نتیجه با توجه به قضیه فشردگی مساحت زیر منحنی نیز برابر مساحت مستطیل ها خواهد بود.

مجموع ریمانی تابع f(x) را در فاصله $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(c_i) \qquad c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

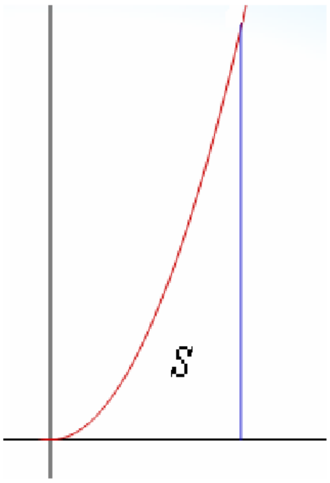
اگر f(x)>0 باشد، مساحت f(x) در فاصله $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(c_i)$$

انتگرال معین : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(c_i)$

با توجه به تعریف بالا تابع f(x) در فاصله $[a,b]$ انتگرال پذیر است، اگر حد بالا موجود باشد.

سوال: فرض کنید $f(x) = x^3$ و مساحت محصور بین خطوط x=1 و x=0 را با تعریف مساحت انتگرال معین حساب کنید؟



$$x_i = \frac{b-a}{2} = \Delta x = \frac{1}{n}$$

$$x_i = \frac{i}{n}$$

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n} (\frac{i}{n})^3 = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=0}^{n} i^3 = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{n^4} (\frac{n^2(n+1)^2}{4}) = \frac{1}{4}$$

مثال : $f(x) = \int_0^x t^3 dt = \lim_{x \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{x}{n} (\frac{ix}{n})^3 = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{n^4} \sum_{i=0}^{n} i^3 = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{n^4} (\frac{n^2(n+1)^2}{4}) = \frac{x^4}{4}$

فرمول های انتگرال نامعین:

$$1)\ \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad \left(-1 \neq a \in \mathbb{R}\right) \quad 2)\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad \left(x \neq 0\right)$$

$$3)\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \left(a > 0\right) \qquad 3')\ \int e^x dx = e^x + C,$$

$$4)\ \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad 5)\ \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$6)\ \int \sec x dx = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C, \qquad \left(x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$7)\ \int \csc x dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C, \qquad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$8)\ \int \sec^2 x dx = \tan x + C, \qquad \left(x \neq k\frac{\pi}{2}\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$9)\ \int \csc^2 x dx = -\cot x + C, \qquad \left(x \neq k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$10)\ \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, \qquad \left(a \neq 0\ ,\ x \neq k\frac{a\pi}{2}\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$11)\ \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \qquad (a \neq 0, x \neq \pm a)$$

$$12)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$$

قضیه. در صورتی که $\int f(x)dx = F(x) + C$ ، $\int g(x)dx = G(x) + C$ و a عددی مخالف صفر باشد، آنگاه

$$1)\ \int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + C \quad 2)\ \int af(x)dx = aF(x) + C$$

$$3)\ \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

مثال ها:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+5x-1}{x}\,dx &= 3\int x dx+5\int dx-\int \frac{dx}{x}\\ &= 3\frac{x^2}{2}+5x-\ln|x|+C\end{aligned}$$

اگر $x \neq 0$ آنگاه

$$\begin{aligned}\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 dx &= \int \left(x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right) dx\\ &= \int x^3dx+3\int xdx+3\int \frac{dx}{x}+\int \frac{dx}{x^3}\\ &= \frac{x^4}{4}+3\frac{x^2}{2}+3\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+C\end{aligned}$$

اگر $x > 2$ آنگاه

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}} &= \int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}\,\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}\,dx\\ &= \int \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}{(x+1)-(x-2)}\,dx\\ &= \frac{1}{3}\int \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right) dx\\ &= \frac{2}{6}\sqrt{(x+1)^3}+\frac{2}{6}\sqrt{(x-2)^3}+C\end{aligned}$$

اگر $x \neq -1$ آنگاه

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3dx}{x+1} &= \int\left(x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \int (x^2-x+1)\,dx - \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C\end{aligned}$$

به ازای هر x ای

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+C$$

اگر $k\pi-\pi/2 < x < k\pi+\pi/2$ آنگاه

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sin x} &= \int \frac{dx}{1+\sin x}\frac{1-\sin x}{1-\sin x}dx = \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx \\ &= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x dx + \int \frac{-\sin x}{\cos^2 x}d. \\ &= \int -(\ln|\cos x|)'\,dx + \int -\left(\frac{1}{\cos x}\right)' dx \\ &= -\ln|\cos x| - \frac{1}{\cos x}+C\end{aligned}$$

به ازای هر x ای

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+\cos x}\,dx &= \int \sqrt{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}dx \\ &= \sqrt{2}\int \operatorname{sgn}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx \\ &= 2\sqrt{2}\operatorname{sgn}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)+C\end{aligned}$$

به ازای هر x ای

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)\cos(3x)\,dx &= \int \frac{1}{2}(\sin(2x+3x)+\sin(2x-3x))\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int(\sin(5x)-\sin x)\,dx\\ &= -\frac{1}{10}\cos(5x)+\frac{1}{2}\cos x+C\end{aligned}$$

اگر $x > -1$ آنگاه

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1}\,dx &= \int (x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx\\ &= \int\left((x+1)^{3/2}-(x+1)^{1/2}\right)dx\\ &= \frac{(x+1)^{5/2}}{5/2}-\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}+C\\ &= \frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C\end{aligned}$$

روش های انتگرال گیری:

۱. انتگرال گیری به روش تغییر متغیر

قرار داد. منظور از $\int f(x)\,du(x) = \int f\,du$ انتگرال $\int f(x)u'(x)\,dx$ است. در ادامه، $u(x)$ تابعی مشتقپذیر و دلخواه است.

۲.۳.۵ قضیه. اگر $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ و $u(x)$ تابعی مشتقپذیر باشد، در این صورت

$$\int f(u)\,du = F(u)+C.$$

برهان: کافی است توجه کنیم که $\{F(u)\}' = u'(x)F'(u) = u'(x)f(x)$ و نیز $f(u)\,du = u'(x)f'(u(x))\,dx$.
□

این قضیه، بزرگترین دستآویز ما برای حل مسایل انتگرال نامعین است.

مثال. اگر فرض کنیم $u = x^2 + 3x + 7$ آنگاه $du = (2x+3)\,dx$ و در نتیجه

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x^2+3x+7| + C$$

مثال. اگر فرض کنیم $u = \ln|\sec x|$ آنگاه $du = \tan x dx$ و در نتیجه

$$\int \frac{\tan x dx}{\ln|\sec x|} = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2|\sec x| + C$$

۲. انتگرال گیری به روش جزء به جزء

قضیه. فرض کنید $u = u(x)$ و $v = v(x)$ دو تابع مشتقپذیر بر $(a;b)$ هستند و انتگرال نامعین $\int udv$ موجود است. در این صورت $\int vdu$ نیز موجوداست و

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu} \qquad (۱.۵)$$

برهان: با توجه به مفروضات مسأله و اینکه $d(uv) = udv + vdu$ داریم $udv = d(uv) - vdu$ و بنابراین کافی است که از طرفین این تساوی انتگرال بگیریم. □

مثال. فرض کنیم $u = x$ و $dv = e^x$، در نتیجه $du = dx$ و $v = \int e^x dx = e^x + C$ بنابراین

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= \int udv = uv - \int vdu \\ &= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C \\ &= (x-1)e^x + C\end{aligned}$$

مثال. از خواص اعداد مختلط برای محاسبهٔ انتگرالها می‌توان استفاده نمود به عنوان مثال در مورد انتگرال $\int xe^{-x}\cos(2x)\,dx$ به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\int xe^{-x}\cos(2x)\,dx &= \mathrm{Re}\left(\int xe^{-x}e^{2xi}\,dx\right) = \mathrm{Re}\left(\int xe^{(2i-1)x}\,dx\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2i-1}\int x\,de^{(2i-1)x}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{-1-2i}{5}\left[xe^{(2i-1)x} - \int e^{(2i-1)x}\,dx\right]\right) \\ &= \frac{-1}{5}\mathrm{Re}\left((1+2i)\left[xe^{(2i-1)x} - \int e^{(2i-1)x}\,dx\right]\right) \\ &= \frac{-1}{5}\mathrm{Re}\left((1+2i)\left[xe^{(2i-1)x} - \frac{1}{2i-1}e^{(2i-1)x}\right]\right) \\ &= \frac{-1}{25}e^{-x}\mathrm{Re}\left(\left[5(1+2i)x + (1+2i)^2\right]e^{2xi}\right) \\ &= \frac{-1}{25}e^{-x}\mathrm{Re}\left(\left[5(1+2i)x + (4i-3)\right].(\cos(2x) + i\sin(2x))\right) \\ &= -\frac{e^{-x}}{25}\big((5x-3)\cos(2x) - (10x+4)\sin(2x)\big) + C\end{aligned}$$

۳. انتگرال گیری از کسرهای گویا:

$\int \frac{f(x)}{g(x)}$

انتگرال کسری ساده نوع اول

$$I = \int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \begin{cases} \frac{1}{n}\ln|ax+b| + c & n = 1 \\ \frac{1}{a(1-n)}(ax+b)^{1-n} + c & n \neq 1 \end{cases}$$

مثال:

$$\int \frac{dx}{x^{۲}-x-۲}=\int \frac{dx}{(x+۱)(x-۲)}=\frac{۱}{-۱-۲}\ln\left|\frac{x+۱}{x-۲}\right|+c=\frac{-۱}{۳}\ln\left|\frac{x+۱}{x-۲}\right|+c=\frac{۱}{۳}\ln\left|\frac{x-۲}{x+۱}\right|+c$$

مثال:

$$I=\int \frac{۲x+۱}{x^{۲}-۵x+۶}=\int \frac{۲x+۱}{(x-۲)(x-۳)}dx=\int \frac{A}{x-۲}dx+\int \frac{B}{x-۳}dx$$

برای پیدا کردن A و B به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\frac{A}{x-۲}+\frac{B}{x-۳}=\frac{A(x-۳)+B(x-۲)}{(x-۲)(x-۳)}=Ax-۳A+Bx-۲B=(A+B)x-۳A-۲B$$

$$۲x+۱\equiv (A+B)x-۳A-۲B \Rightarrow \begin{cases} A+b=۲ \\ -۳A-۲B=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-۵ \\ B=۷ \end{cases}$$

$$I=\int \frac{-۵}{x-۲}dx+\int \frac{۷}{x-۳}dx=-۵\ln|x-۲|+۷\ln(x-۳)+c$$

انتگرال کسری ساده نوع دوم

$$I=\int \frac{Px+q}{(ax^2+bx+c)^n}dx \qquad (b^2-4ac<0)$$

$$I=\int \frac{\frac{p}{2a}(2ax+b)-\frac{Pb}{2a}+q}{(ax^2+bx+x)^n}dx=\frac{P}{2a}\int \frac{2ax-b}{(ax^2+bx+c)^n}dx+\int \frac{q-\frac{Pb}{2a}}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

$$J=\int \frac{q-\frac{Pb}{2a}}{(ax^2+bx+c)^n}dx=q-\frac{Pb}{2a}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}\xrightarrow[\frac{x+A}{B}=\tan t]{ax^2+bx+c\equiv(x+A)^2+B^2}$$

سوال: انتگرال $I=\int \frac{xdx}{x^2+2x+3}$ را حساب کنید؟

$$\int \frac{\frac{1}{2}(2x+x)-1}{(x+1)^2+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{(x+1)^2+2}dx-\int\frac{dx}{(x+1)^2+2}\xrightarrow[dx=\sqrt{2}(1+\tan^2 t)dt]{\frac{x+1}{\sqrt{2}}=\tan t}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|(x+1)^2+2\right|-\int\frac{\sqrt{2}(1+\tan^2 t)dt}{2(1+\tan^2 t)}=\frac{1}{2}\ln\left|(x+1)^2+2\right|-\frac{\sqrt{2}}{2}t+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|(x+1)^2+2\right|-\frac{\sqrt{2}}{2}Arc\tan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c$$

قضیه اویلر:

هر چند جمله ای مانند $g(x)$ قابل تجزیه به عبارت درجه اول $(x-a)^r$ و عبارت درجه دوم فاقد ریشه $(ax^2+bx+c)^m$ می باشد که از اولی ریشه های حقیقی و از دومی ریشه های مختلط مزدوج نتیجه می شود.

$$g(x)=(x-a)^n g_1(x)$$

$$=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)^{ni}\prod_{i=m+1}^{n}(a_i x^2+b_i x+c_i)^{n_i}$$

مثال:

$$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x+1)=(x-1)(x^2+1)$$

$$(x^6-1)^2=((x^3)^2-1)^2=((x^3-1)(x^3+1))^2=(x-1)^2(x+1)^2(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2$$

قضیه: فرض کنیم $x=a$ ریشه مکرر مرتبه n ، $g(x)$ باشد، (یعنی $g(x)=(x-a)^n g_1(x)$) در این صورت کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^n}+\frac{A_2}{(x-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)}+\frac{f_n(x)}{g_1(x)}$$

محاسبه انتگرالهایی به صورت $\int \sin^m x dx$ و $\int \cos^m x dx$:

حالت اول : اگر m فرد باشد :

این حالت را برای توان فرد sin توضیح می‌دهیم ، توان فرد cos نیز به طریق مشابه بدست می‌آید که اعمال مروبط به آن در داخل پرانتز اشاره شده است.

در این حالت ابتدا توانی از $\sin(\cos)$ جدا کرده وبقیه توانهای زوج $\sin(\cos)$ را با استفاده از فرمول $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ $(\cos^2 x = 1 - \sin^2 x)$ به $\cos(\sin)$ تبدیل می‌کنیم. در نهایت از تغییر متغیر $u = \cos x$ $(u = \sin x)$ استفاده می‌کنیم به عبارتی :

$$\int \sin^{2k+1} x dx = \int \sin^{2k} x(\sin x dx) = \int (\sin^2 x)^k (\sin x dx)$$
$$= \int (1 - \cos^2 x)^k (\sin x dx) = \int (1 - u^2)^k du$$

حال توان را بسط داده و انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

حالت دوم : اگر m زوج باشد.

در این صورت از فرمولهای نصف کمان به صورت زیر استفاده می‌کنیم :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

مثال:

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

محاسبه انتگرالهایی به صورت $\int \tan^m x \sec^n x dx$ و $\int \cot^m x \csc^n x dx$:

در این جا محاسبه انتگرالهایی به صورت $\int \tan^m x \sec^n x dx$ را توضیح می‌دهیم به طریق مشابه $\int \cot^m x \csc^n x dx$ محاسبه می‌گردد که اعمال مربوط به آن در پرانتز گفته شده است.

حالت اول : اگر توان $\tan x$ $(\cot x)$ فرد باشد.

در این حالت یک $\sec x$ $\tan x$ $(\cot x \csc x)$ از عبارت جدا کرده و بقیه عبارات باقی مانده را با استفاده از فرمول $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ $(\cot^2 x = \csc^2 x - 1)$ به جنس $\sec x$ $(\csc x)$ تبدیل می‌کنیم. در نهایت از تغییر متغیر $u = \sec x$ $(u = \csc x)$ استفاده می‌کنیم.

حالت دوم : اگر توان $\sec x$ $(\csc x)$ زوج باشد :

در ایـن حالـت یـک $\sec^۲ x$ $(\csc^۲ x)$ از عبـارت جـدا کـرده و بقیـه عبـارات را بـا اسـتفاده از فرمـول $\sec^۲ x = ۱+\tan^۲ x$ $(\csc^۲ x = ۱+\cot^۲ x)$ به جنس $\tan x$ $(\cot x)$ تبدیل میکنیم. در آخـر از تغییـر متغیر $u = \tan x$ $(u = \cot x)$ استفاده می‌کنیم.

به عبارتـی :

الف) اگـر توان $\tan x$ فـرد باشد در اینصـورت :

$$\int \tan^{۲k+۱} x \sec^{n} x dx = \int \tan^{۲k} x \sec^{n-۱} x (\tan x \sec x dx)$$

$$= \int (\sec^۲ x - ۱)^{k} \sec^{n-۱} x (\tan x \sec x dx)$$

$$u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \tan x dx$$

$$= \int (u^۲ - ۱)^{k} u^{n-۱} du$$

حال توان را بسط داده و انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

اگر توان $\sec x$ زوج باشد در این صـــورت :

$$\int \tan^{m} x \sec^{۲k} x dx = \int \tan^{m} x \sec^{۲k-۲} x (\sec^۲ x dx)$$

$$= \int \tan^{m} x (\sec^۲ x)^{k-۱} (\sec^۲ x dx)$$

$$= \int \tan^{m} x (۱+\tan^۲ x)^{k-۱} (\sec^۲ x dx)$$

$$u = \tan x \Rightarrow du = \sec^۲ x dx$$

$$= \int u^{m} (۱+u^۲)^{k-۱} du$$

حال توان را بسط داده و انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

محاســـبه انتگرالهـــایی بـــه صـــورت $\int \sin \alpha x \sin \beta x \, dx$ ، $\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx$ ، $\int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx$:

در این حالت از فرمولهای زیر استفاده می‌کنیم :

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x]$$

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{۱}{۲}[\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x]$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x]$$

پایان